Übung Mathematik 1 für Informatiker, SS 02
3.Test, 25. Juni 2002

Familienname: .... Vorname:...........................

Matrikelnr.: .... Gruppe: ....

Benutzen Sie bitte für Ihre Lösungen die Vorder-und Rückseiten des Angabeblattes und verzichten Sie nach Möglichkeit auf zusätzliche Zettel.

(1) Ein alter Hacker möchte sein Erspartes in die superschnellen Prozessoren des Typs i0815ultra und in die neuen SuperGiga Speichermodule investieren. Dabei kostet ein solcher Prozessor das achtfache eines Speichermoduls, und er schätzt, daß er von x Prozessoren und y Speichermodulen einen Nutzen erzielen kann, der proportional zu x^2y ist. In welchem Verhältnis sollte er die Prozessoren und Speichermodule kaufen?

Der Nutzen

$$N = x^2y$$

ist zu maximieren. Dabei ist die Nebenbedingung

$$8x + y = E$$

zu beachten. Hier bezeichnet E das Ersparte, also den Betrag, der ausgegeben werden soll (Geldeinheit ist hier der Preis für ein Speichermodul). Aus dieser Nebenbedingung kann man sich etwa das y herausrechnen:

$$y = c - 8x$$

und in den Nutzen einsetzen:

$$N = x^2(c - 8x).$$

Das Maximum bestimmen wir durch Nullsetzen der Ableitung:

$$N' = 2x(c - 8x) + x^2(-8),$$

was zur Gleichung

$$2x(c - 8x) = 8x^2$$

führt. Die Lösung $x = 0$ entspricht offenbar nicht dem Maximum. Wir dürfen daher duch x durchdividieren:

$$2(c - 8x) = 8x,$$

was zur Lösung

$$x = \frac{c}{12}$$

führt. Damit ergibt sich aus der Nebenbedingung

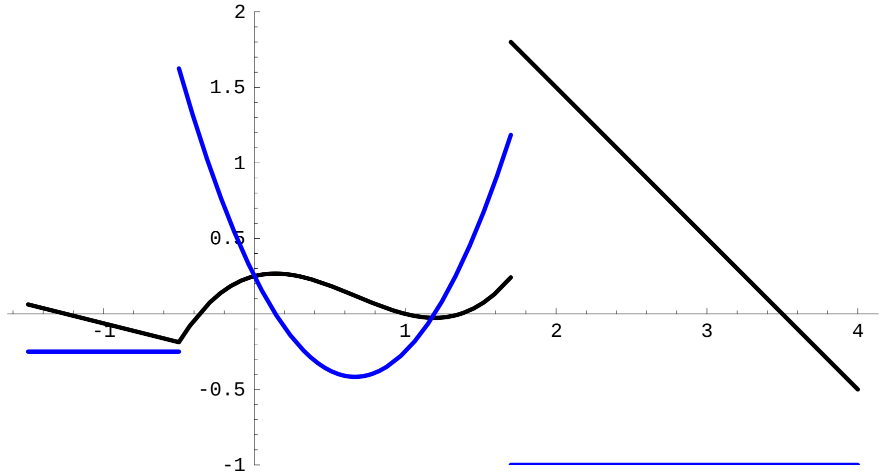
$$y = c - 8x = c - 8\frac{c}{12} = 4\frac{c}{12}$$

sowie

$$\frac{y}{x} = 4.$$

Unser Hacker sollte also zu jedem Prozessor 4 Speichermodule kaufen.

(2) • Die in der Graphik dargestellte Funktion sei mit f bezeichnet. Tragen Sie darin deren Ableitung f' skizzenhaft ein.



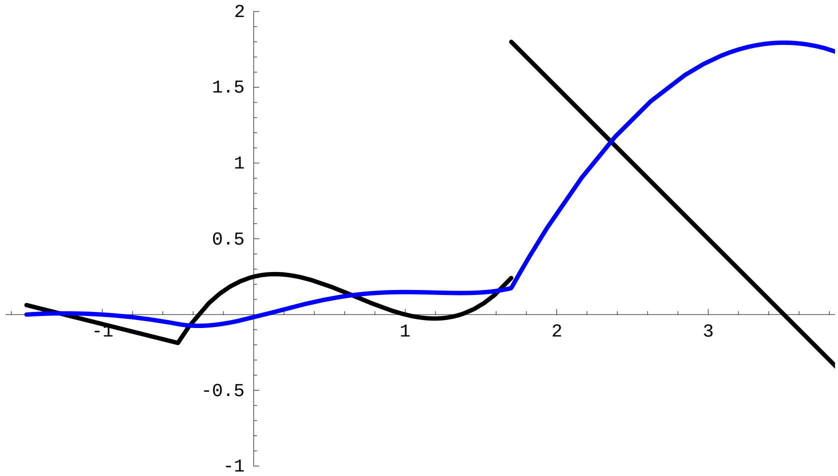
Achten Sie dabei besonders auf eine korrekte Darstellung der besonderen Punkte.

- An welchen Stellen ist f offensichtlich nicht differenzierbar? -0.5, 1.7

- Weiters sei die Funktion g definiert durch

$$g(x) = \int_{-1.5}^{x} f(t)dt.$$

Tragen Sie g in gleicher Weise in die untere Graphik ein.



(3) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(0) = 1$; dabei seien von f die folgenden Werte bekannt:

y_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(0.0, y_i)$	3.0	3.0	2.8	2.6	2.3	2.0	2.1	1.9	1.7	1.3	1.1
$f(0.1, y_i)$	3.5	2.7	2.4	2.1	1.9	1.7	1.9	2.0	1.8	1.5	1.2

Berechnen Sie daraus näherungsweise $y(0.2)$.

Laut Anfangsbedingung ist jedenfalls $y(0) = 1$; für die Ableitung an dieser Stelle gilt daher, gemäß Differentialgleichung und Tabelle,

$$y'(0) = f(0,1) = 2.0.$$

Damit gilt

$$y(0.1) \approx y(0) + y'(0) \cdot 0.1 = 1.2.$$

An dieser Stelle fahren wir fort, denn

$$y'(0.1) = f(0.1, y(0.1)) \approx f(0.1, 1.2)) = 1.9,$$

und damit

$$y(0.2) \approx y(0.1) + y'(0.1) \cdot 0.1 \approx 1.39.$$