Mathematik 1 (Analysis)

J. Schicho

Vorlesungsmitschrift SS 2003

1. Funktionen

Darstellung von Funktionen

- Wertetabelle

  Beispiel: A = {1, 2, 3, 4}
  B = {A, B, C, D, …, X, Y, Z}

1	A
2	A
3	Z
4	X

- Graph

  xy-Ebene ist ein Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$.
  d.h. $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ (Menge aller Paare bzw. Produktmenge.

  Wenn A und B endlich sind:
  Produktmenge = {(1, A), (1, B), …, (2, A), …, (4, Z)}
  f = {(1, A), (2, A), (3, Z), (4, X)}

- Funktionsvorschrift

  $x \mapsto x^2$
  Schreibweise: $f: A \to B; x \mapsto Ausdruck$
  A … Urmenge, Menge der Stellen
  B … Bildmenge
  Ausdruck … Funktionsvorschrift

  Beispiel:

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; 2x \mapsto x^2$ (→ falsche Syntax)

$$\downarrow$$

$$2x = y$$

$$x = \frac{y}{2}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{4}$$

$$y \mapsto \frac{y^2}{4}$$

$f^{-1}\circ f: A \to A$ $\quad$ id_A identisch
$f\circ f^{-1}: B \to B$ $\quad$ id_B identisch

Eine Funktion $g: B \to A$ und für die $g \circ f = id_A$ ist, heißt linksinverse Funktion von *f*.

Berechnen der inversen Funktion falls die Funktion durch Term gegeben ist.

$f: A \to B; x \mapsto F(x)$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= F(x) \\ y &= 7x - 2 \\ y + 2 &= 7x \\ \frac{y+2}{7} &= x \end{aligned}$$

Versuch x auf eine Seite zu bringen

Umkehrfunktion: $f^{-1}: B \to A; y \mapsto \dfrac{y+2}{7}$

Weitere Bezeichnungen:

$f: A \to B$ sei eine beliebige Funktion
Das Bild von *f* geschrieben *f*(*A*) ist die Funktion definiert als
$\{b \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ so dass } f(a) = b\}$.
Es gilt: $f(A) \subseteq B$
$f(A) = B$ → *f* surjektiv.

Jede Funktion $f: A \to B$ induziert eine Relation $\sim_f$ durch $a_1 \sim_f a_2 \Leftrightarrow f_{(a_1)} \sim f_{(a_2)}$.
Das ist eine Äquivalenzrelation d.h.

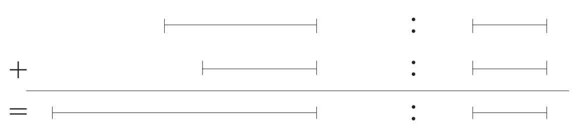
$a_1 \sim a_1$ Reflexivität
$a_1 \sim a_2 \Rightarrow a_2 \sim a_1$ Symmetrie
$a_1 \sim a_2 \wedge a_2 \sim a_3 \Rightarrow a_1 \sim a_3$ Transitivität

2. Reelle Zahlen

"Antike Def.": Eine reelle Zahl ist eine Proportion von zwei messbaren Größen.

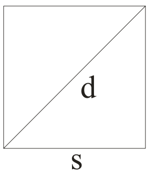
Bsp:  = 2,1

"Rechenoperationen" sind in der Regel geometrisch definiert.
Bsp. Addition:



Vermutung: Jede Proportion lässt sich beschreiben als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen.

Falsch: Das Verhältnis von Seite und Diagonale eines Quadrats lässt sich nicht durch Zahlen ausdrücken.
"irrationale Proportion"



$d : s = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl der Form $\frac{p \in \mathbb{Z}}{q \in \mathbb{Z}}$.

Einführung des Dezimalsystems

Def.: Eine Dezimalzahl ist eine endliche Kette von Zeichen aus {0, 1, …, 9, ., +, -} mit folgenden syntaktischen Eigenschaften:
[+ | -] Zahlen . Zahlen

1,0 : 3,0 = 0,3333… → kein endlicher String

Def. 1: Ein unendlicher String aus einem Alphabet Σ (in unserem Fall {0, 1, …, 9, ., +, -}) ist eine Zeichenkette die nie abbricht.

Def. 2: Ein String ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \Sigma$
z.B.: 1,234 wobei

$$\begin{array}{ccccc} 1 & , & 2 & 3 & 4 \\ f(1) & & f(2) & f(3) & f(4) \end{array}$$

Def. 3: Eine unendliche Dezimalentwicklung ist ein unendlicher String aus dem Alphabet Σ (wie oben), mit den obigen syntaktischen Beschränkungen.

Problem: $\left.\begin{array}{r} 0{,}999999... \\ 1{,}000000... \end{array}\right\}$ müssten die selben reellen Zahlen sein.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf den unendlichen Dezimalentwicklungen.

$a \sim b \Leftrightarrow a = b$
oder
a endet mit einer unendlichen Folge von 9en,
b endet mit einer unendlichen Folge von 0en
und der Teil vor diesen beiden unendlichen Folgen unterscheidet sich um 1 oder umgekehrt.

z.B.: 0,23999… ~ 0,24000…

→ Def: Eine reelle zahl ist eine Äquivalenzklasse von Dezimalentwicklungen.

Beobachtung: Jede Klasse hat entweder ein oder zwei Elemente, d.h. jede reelle Zahl besitzt entweder eine oder zwei Dezimalentwicklungen.

Darstellung von unendlichen Dezimalentwicklungen am Computer

Periodische Dezimalentwicklung

0,3333333… = 0,'3'

d.h. Σ wird erweitert mit ', was die Periode markiert.

0,23'9'

1,'0' : 7,'0' = 0,'142857'

Satz: Jede rationale zahl lässt sich als periodische Dezmalentwicklung darstellen.

Nichtperiodische Dezimalentwicklungen:

$\pi = 3.14159265358979323846264338328\ldots$
$\alpha = 0{,}12345678910111213141516171819202122\ldots$
$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872421\ldots$

α lässt sich endlich beschreiben durch ein kurzes Programm (Algorithmus) dass diese unendliche Zeichenkette ausdrückt.
Unendliche Dezimalentwicklungen die sich durch eine Turingmaschine (Programm) endlich beschreiben lassen heißen gesetzmäßig oder berechenbar.

Wie rechnet man mit diesen reellen Zahlen?

(d.h. Klassen von unendlichen Dezimalentwicklungen)

Bsp.: Addition

Versuch 1: Verschiebe so dass "," untereinanderstehen.

$$\begin{array}{r} 23{,}147908... \\ +\quad 0{,}053664... \\ \hline \end{array}$$

→ Die Methode wie bei endlichen Dezimalzahlen "von rechts nach links" ist hier nicht möglich.

Versuch 2: Abbruch bei n-ter Stelle hinter "," für n = 1, 2, 3, 4, 5, …

$$\begin{array}{r} 23{,}1 \\ +\quad 0{,}0 \\ \hline 23{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}14 \\ +\quad 0{,}05 \\ \hline 23{,}19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}147 \\ +\quad 0{,}053 \\ \hline 23{,}200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}1479 \\ +\quad 0{,}0536 \\ \hline 23{,}2015 \end{array}$$

Summe ist 23,2015… → scheint zu funktionieren

Das Ergebnis ergibt sich als Grenzwert einer Folge
$a_1 = 23{,}1;\quad a_2 = 23{,}19;\quad ...$
Grenzwert: $\lim\limits_{1\to\infty} a_n = 23{,}201...$ (näheres über Grenzwert später)

Dieser Versuch zielt darauf ab, eine Turingmaschine "T+" zu konstruieren, die drei Bänder hat. (Zwei Lese- und ein Schreibband). Auf den ersten beiden Bändern werden die Eingaben (Summanden) geschrieben (durch eine Turingmaschine "T_A" und "T_B") und auf das Ausgabeband das Ergebnis.

Band 1: 0,33333…
Band 2: 0,66666…

Um die erste Ziffer des Resultates zu berechnen müsste "T+" unendlich weit nach rechts lesen. Wenn die beiden Eingaben wie oben sind kann "T+" die erste Ziffer des Resultats nicht schreiben. → lässt sich reparieren durch die zusätzliche Ziffer -1.

Bsp.: $0{,}3333\cancel{3}2$
$\underline{0{,}6666\cancel{6}6}$
$1{,}0000\text{-}1$

Def.: Eine reelle Zahl heißt berechenbar wenn sie sich beliebig genau approximieren lässt, d.h. es gibt ein Programm, das bei Eingabe n eine (endliche) Dezimalzahl a_n ausgibt, so dass $|a_n - \alpha| \leq 10^{-n}$.

3. Folgen und Reihen

Def.: Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notation: Ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, so schreiben wir a_n für $a(n)$.
Die Funktion $n \mapsto a_n$ wird geschrieben $(a_n)_n$.

→ Arithmetische Folge: $a_n = kn + d$
(d, $d+k$, $d+2k$, …)
$(kn + d)_n$

→ Konstante Folge: $c_n = (c, c, c, c, ...)$

→ Geometrische Folge: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = const.$
$a_n = aq^n; \quad (aq^n)_n$
(a, aq, aq^2, aq^3, …)

→ Rekursiv definierte Folge: $a_0 = a; \quad a_{n+1} = qa_n$ (rekursive def. der geometrischen Folge)
Fibonecci-Folge: $a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
Spezialfall: Iteration von F: $a_0 = a; \quad a_{n+1} = f(a_n)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beilspiel: $f : x \mapsto \cos x$, d.h. $a_0 = 0; \quad a_{n+1} = \cos a_n$
(1; 0,540; 0,858; 0,654; 0,793; 0,791; 0,764; 0,723; 0,750; …)
Grenzwert: 0,739.
Konvergiert gegen einen Fixpunkt von *f*. In diesem Fall: $\cos(0,739) = 0,739$.

Ein Wert x sodass $f(x) = x$ heißt Fixpunkt von *f*. Iterationen von Funktionen führen zu Fixpunkten. „Attraktive Fixpunkte“ x sond solche, bei denen rekursive Folgen $a_{n+1} = f(a_n)$ gegen x konvergieren, wenn der Startwert a_0 in einem Intervall um x liegt. („Attraktionsgebiet“).

Das muss nicht immer so sein:

Beispiel: Iteration $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto 4x(1-x)$

$$a_0=\frac{1}{3};\quad a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$$

Die Folge hat keinen Grenzwert, sondern zeigt chaotisches Verhalten im Intervall [0,1]. (Intervall $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$)

Die Folge kommt jeder Zahl $\alpha\in[0,1]$ unendlich oft beliebig nahe.

Eigenschaften von Folgen

Def.: $(a_n)_n$ heißt monoton steigend (fallend) wenn für alle n gilt $a_{n+1}\ge a_n \quad (a_{n+1}\le a_n)$.

$(a_n)_n$ heißt streng monoton steigend (fallend) wenn für alle n gilt $a_{n+1}>a_n \quad (a_{n+1}<a_n)$.

Beispiel: $(k_n+d)_n$ ist $\begin{cases}\text{monoton steigend wenn } k\ge 0\\ \text{monoton fallend wenn } k\le 0\\ \text{streng monoton steigend wenn } k>0\\ \text{streng monoton fallend wenn } k<0\end{cases}$

$(a_n)_n$ heißt nach oben beschränkt (nach unten beschränkt) wenn es eine Zahl M gibt sodass für alle n gilt $a_n\le M \quad (a_n\ge M)$.

Beispiel: $a_n=\frac{n+2}{n+1}$ ist nach unten durch 0 ($a_n=\frac{n+2}{n+1}\ge 0$)

und ist nach oben durch 2 beschränkt ($a_n=\frac{n+2}{n+1}\le 2$).

Beweis:

$$\frac{n+2}{n+1}\le 2$$
$$n+2\le 2(n+1)$$
$$n+2\le 2n+2$$
$$0\le n$$

ist richtig für alle $n\in\mathbb{N}$.

Eine Folge heißt genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

~~Geometrische Folge $(2^n)_n$ ist unbeschränkt.~~

~~Wähle $M:=3^n$ dann gilt $2^n\le 3^n$, daher ist $(a^n)_n$ beschränkt.~~

Wichtig: Zuerst M wählen, unabhängig von n!

Proposition (Sätzchen):

Jede monoton steigende Folge ist nach unten beschränkt.
Jede monoton fallende Folge ist nach oben beschränkt.

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt ***Nullfolge*** wenn es für jedes Intervall $[-\Sigma \mid \Sigma]$ um 0 (d.h. $\Sigma > 0$) gilt dass nur endlich viele Folgeglieder außerhalb liegen. (Das heißt die Folge bleibt beliebig nahe bei 0, konvergiert gegen 0).

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge

$\Sigma = 10^{-6}$

Fast alle Folgeglieder a_n liegen im Intervall $[-10^{-6} \mid 10^{-6}]$, denn

$a_n \geq 0 \geq -10^{-6}$

$a_n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \geq 10^6$

Die Folgeglieder ($a_{1000000}, a_{1000001}, ...$) sind alle im Intervall.

Beispiel: $(aq^n)_n$ ist eine Nullfolge wenn $|q|<1$.

Insbesondere sind Nullfolgen beschränkt.

Grenzwert

Def 1.: Die Folge $(a_n)_n$ hat den Grenzwert a genau dann, wenn die Folge $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.

Def 2.: (äquivalent dazu): Die Folge $(a_n)_n$ hat den Grenzwert a, wenn für jedes Intervall $[a-\Sigma \mid a+\Sigma]$ $(\Sigma > 0)$ gilt, dass nur endlich viele Glieder außerhalb liegen.

Beispiele: $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ hat den Grenzwert 1.

$a_0 = 0; \quad a_{n+1} = \cos a_n$ hat den Grenzwert a=0,739…

Def.: Sei $(a_n)_n$ eine Folge $a \in \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl a heißt Häufungswert der Folge, wenn jedes Intervall $[a-\Sigma \mid a+\Sigma]$ $(\Sigma > 0)$ unendlich viele Folgeglieder enthält.

Beispiele: $(a(-1)^n)_n$ besitzt zwei Häufungswerte, nämlich a und $-a$.

(a, -a, a, -a, a, …)

$\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}\right)_n$ besitzt zwei Häufungswerte, nämlich 1 und -1.

(-1; 1,5; -1,33; 1,25; -1,2; 1,17; …)

Diese Folge besitzt zwei Teilfolgen mit Grenzwert -1, 1.

Satz: Sei $(a_n)_n$ eine Folge $a \in \mathbb{R}$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) a ist Häufungswert der Folge $(a_n)_n$.
2) Es existiert eine Teilfolge $(b_n)_n = \left(a_{f(n)}\right)_n$ mit Grenzwert a.

Grenzwert Notation

a ist Grenzwert von $(a_n)_n$.

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Falls $(a_n)_n$ keinen Grenzwert besitzt, so hat der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ keinen Wert.

Rechenregeln für den Grenzwert

Addition und Multiplikation von Folgen erfolgt Gliedweise.

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$$
$$(a_n)_n \cdot (b_n)_n = (a_n \cdot b_n)_n$$

Wenn $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren (d.h. es existiert ein Grenzwert) so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Beispiel: $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1+0 = 1$$

Nebenrechnung: $$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Konvergenzrate ist eine Funktion $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ so dass für alle Σ, n gilt:
Wenn $n \geq N(\Sigma) \Rightarrow a_n \in [a-\Sigma, a+\Sigma]$.

Beispiel:

Wenn z.B. $\Sigma = 10^{-6}$, dann liegen alle Folgeglieder ab $N(10^{-6})$ in einem 10^{-6}-Intervall um den Grenzwert.
D.h. um den Grenzwert bis auf Genauigkeit 10^{-6} zu bestimmen, reicht es das $N(10^{-6})$-te Glied auszurechnen.

Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ $N(10^{-6})=10^{-6}$

Grenzwert ist höchstens 10^{-6} von $a_{1000000}$ entfernt.
→ sehr schlechte Konvergenz.

$$(a_n)_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n \quad \text{Grenzwert } e = 2,7182...$$

um 4 Stellen berechnen zu können sind 10000 Berechnungen nötig.
→ schlechte Konvergenz.

Gute Konvergenz: Geometrische Folge ($|q|<1$)

$$q = \frac{1}{2}, \quad a = 1; \qquad \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_n$$

Konvergenzrate: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Für Konvergenzrate $N:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ muss gelten $a_{N(\Sigma)} \in [-\Sigma, \Sigma]$

$a_n \in [-\Sigma \,|\, \Sigma]$ für $n \geq N(\Sigma)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \geq -\Sigma$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \leq \Sigma \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{1}{\Sigma} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log\frac{1}{\Sigma}}{\log 2} = \log_2 \frac{1}{\Sigma}$$

$\Sigma = 10^{-6}$

$$N(\Sigma) = \frac{\log 10^6}{\log 2} = \frac{6}{0,27} = 18$$

Wenn $N(\Sigma) \sim \log\left(\frac{1}{\Sigma}\right)$ (Anm.: ~…proportional)

(d.h. um *m* Stellen zu berechnen ($\Sigma = 10^{-6}, N(\Sigma) \sim m$) braucht man $\sim_m$ Folgeglieder), so heißt die Konvergenz linear.

Behauptung: Die Folge $a_0 = 0, a_{n+1} = \cos a_n$ konvergiert linear.

Noch schnellere Konvergenz: Quadratische Konvergenz.

Um *m* Stellen zu berechnen braucht man ca. log *m* Folgeglieder.

Beispiel: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$ → quadratisch konvergierende Folge.

Groß O- und klein o-Notation

(wichtig für Folgen ohne Grenzwert)

Def.: Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen reeller Zahlen. Man sagt:

- a_n ist ein $O(b_n)$ wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ beschränkt ist.
- a_n ist ein $o(b_n)$ wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ eine Nullfolge ist.

Beispiele:

- $a_n = (n+1)(n+2)$

  $b_n = n^2$

  $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} = \frac{n^2+3n+2}{n^2} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, insbesondere ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ beschränkt.

  Daher ist a_n ein $O(b_n)$.

  → $(n+1)(n+2)$ wächst höchstens quadratisch.

- $a_n = n \cdot \sqrt{n} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{2}{3}}$

  $b_n = n^2$

  $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2} = n^{\frac{2}{3}-2} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$ → Nullfolge

  Daher ist a_n ein $o(b_n)$.

Proposition:

- Wenn a_n ein $o(b_n)$ ist, dann ist es auch ein $O(b_n)$.
- Wenn a_n ein $O(b_n)$ und b_n ein $O(c_n)$ ist, dann ist auch a_n ein $O(c_n)$.

  Beweis:

  $$\frac{c_n}{a_n} = \frac{c_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{a_n}$$

  Wenn $\left|\frac{c_n}{b_n}\right| < M_1$, $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \le M_2$, dann ist $\left|\frac{c_n}{a_n}\right| \le M_1 \cdot M_2$
- Wenn a_n ein $o(b_n)$ und b_n ein $o(c_n)$ ist, dann ist auch a_n ein $o(c_n)$.
- Wenn a_n und b_n beide $O(c_n)$ sind, dann auch $a_n + b_n$ bzw. $a_n - b_n$.
- Wenn a_n und b_n beide $o(c_n)$ sind, dann auch $a_n + b_n$ bzw. $a_n - b_n$.
- n^a ist $o(n^b)$ falls $a < b$.
- $\log n$ ist $o(n)$.
- n^k ist $o(2^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Laufzeit eines Algorithmus:

Wenn die Eingabe Länge n hat, terminiert der Algorithmus z.B. nach höchstens

$\sin\frac{n}{2} + \log(n) + n^{\frac{5}{3}} + 2^n + 7$ Schritten.

→ einfachere, aber fast genauso informative Aussage:

Die Anzahl der Schritte bis zur Termination ist ein $O(2^n)$. (2^n wächst am stärksten.)

Reihen

Sei $(a_n)_n$ eine Folge.
Wir definieren die folgenden Teilsummen:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \\
s_n &= a_0 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

Jede Folge ist eine Reihe.

Beweis: Sei $(b_n)_n$ eine beliebige Folge.

Definiere $(a_n)_n$ durch $a_0 = b_0, \quad a_n = b_n - b_{n-1}$.

Dann ist $$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &= \cancel{b_0} + \cancel{b_1} - \cancel{b_0} + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \ldots + b_n - b_{n-1} = b_n \end{aligned}$$

fundamentales Beispiel:

$$(a_n)_n = (a \cdot q^n)_n, \quad a, q \in \mathbb{R}$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} (a \cdot q^i) = a \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i$$

$$
\left.\begin{aligned}
s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n \\
q \cdot s_n &= aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} \\
a + q \cdot s_n &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = s_{n+1}
\end{aligned}\right\} \text{rekursive Darstellung}
$$

$\boxed{s_0 = a, \quad s_{n+1} = a + q \cdot s_n}$ → rekursive Definition der geometrischen Reihe.

Die Reihe besitzt einen Grenzwert, falls $|q| < 1$.
Das ist der Fixpunkt der Funktion $x \mapsto a + qx$.
Berechnung des Grenzwerts:

$$
\begin{aligned}
x &= a + qx \\
x - qx &= a \\
x(1-q) &= a \\
x &= \frac{a}{1-q}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_n \right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \qquad \rightarrow \underline{\sum_{i=0}^{\infty} (aq^i) = \frac{a}{1-q}}$$

Beispiel Achilles

Achilles läuft 10 mal so schnell wie die Schildkrod. Schildkrod hat einen Vorsprung von 100m.

Distanz bei der Achilles Schildkrod einholt:

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}100\left(\frac{1}{10}\right)^{i}=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}=111{,}\dot{1}\,\mathrm{m}$$

Konvergenzkriterien für Reihen

- notwendiges Kriterium: falls Reihe konvergiert ist dieses erfüllt.
- hinreichendes Kriterium: falls Kriterium erfüllt, ist Reihe konvergent.

Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine Folge.

Die Reihe $(s_n)_n=\left(\sum_{i=0}^{n}a_n\right)_n$ kann nur dann konvergent sein, wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist. (notwendiges Kriterium).

Beispiel:

Geometrische Reihe: Quotient q = 1, a = 1.

$$\sum_{i=0}^{\infty}aq^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}1^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}1=1+1+1+...$$

→ Grenzwert existiert nicht, da $(1)_n$ keine Nullfolge ist.

q = -1, a = 1

$$\sum_{i=0}^{\infty}aq^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}=1-1+1-1+1-...$$

→ Grenzwert existiert nicht. (2 Häufungswerte, 0 und 1).

Beispiel einer Nullfolge, deren Reihe der Teilsummen keinen Grenzwert hat.
„Harmonische Reihe“

$$a_n\ \frac{1}{n} \quad s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

Beweis: Abschätzung durch eine andere Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{32}+...$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...=\infty$$

Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wenn zwei reelle Zahlen $a,q < 1$ existieren, so dass $|a_n| \le aq^n$ für alle n, dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Beweis:

Idee: Die Reihe ist „kleiner“ als eine geometrische Reihe. Von der geometrischen Reihe weiß man dass ein Grenzwert existiert.
Beispiel.:

$$a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$$

Grenzwert $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \cdot i}$ existiert weil $\frac{1}{2^n \cdot n} \le \underset{a}{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{q<1}$. (hinreichendes Kriterium)

Zweites hinreichendes Kriterium:

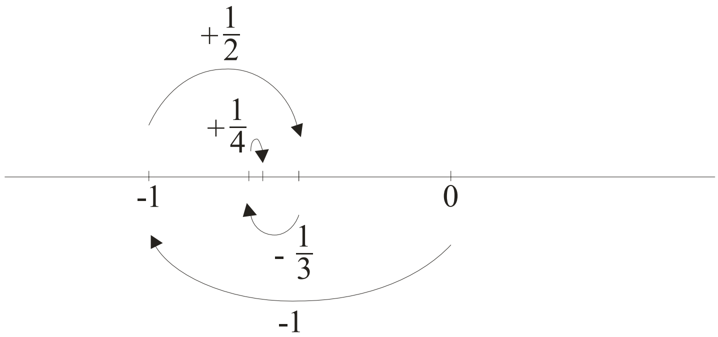
Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$.

Beispiel:

$$(a_n)_n = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)\frac{1}{i} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Grenzwert existiert:



Beweis:

Das Intervall zwischen s_n und s_{n+1} enthält alle nachfolgenden Teilsummen. Die Länge des Intervalls ist a_{n+1} und das ist eine Nullfolge.

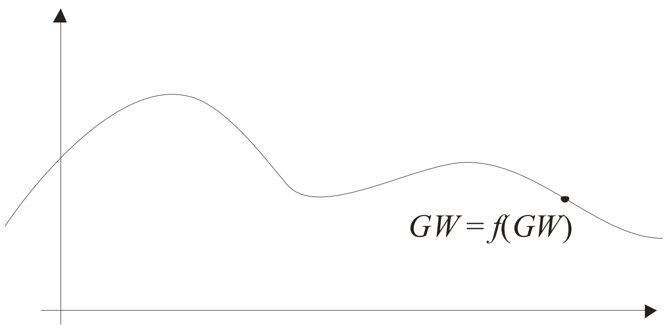
Folgen von Elementen im $\mathbb{R}^2$. D.h. Paare $(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), \dots$ oder Punkte in der Ebene. Irgendwo in der Ebene gibt es eine Häufungsstelle → Grenzwert.

Def.: Folge $\left((a_n,b_n)\right)_n$ von Elementen in $\mathbb{R}^2$ heißt beschränkt wenn es eine Zahl M gibt so dass für alle n gilt $-M \le a_n \le M$ und $-M \le b_n \le M$. (quadratisches Kastl).

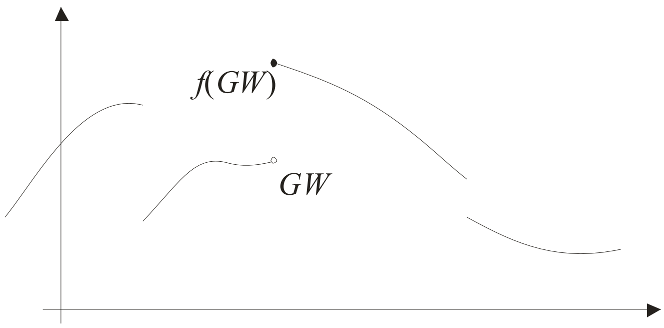
Def 1.: Ein Element (a,b) ist Grenzwert der Folge $\left((a_n,b_n)\right)_n$ wenn es für jedes $\Sigma > 0$ einen Index N gibt so dass alle nachkommenden Folgeglieder (a_{N+n}, b_{N+n}) in einer Σ-Umgebung von (a,b) liegen. (In einem Kreis mit Mittelpunkt (a,b) und Radius Σ.

Def 2.: Eine Folge $\left((a_n,b_n)\right)_n$ ist konvergent wenn die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beide konvergent sind. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

4. Stetigkeit



→ stetige Funktion



→ unstetige Funktion

Weg-Zeit-Funktionen sind immer stetig.

Def.: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion.
Dann heißt f stetig wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_n$ gilt die Folge der Funktionswerte $\left(f(a_n)\right)_n$ ist ebenfalls konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.
(Limesanwendung und Funktion werden vertauscht.)

Vorteil dieser Definition gegen über „zeichnen ohne abzusetzen“: Sie lässt sich verallgemeinern auf Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, bzw. $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$.

Def.: Eine Funktion $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ heißt stetig wenn für jede konvergente Folge $(a_{1,i},\dots,a_{m,i})_i$ im $\mathbb{R}^m$ die Folge der Funktionswerte $\left(f(a_{1,n},\dots,a_{m,i})\right)_i$ konvergiert und

$\lim\limits_{i\to\infty} f(a_{1,i},\dots,a_{m,i})_i = f\left(\lim\limits_{i\to\infty}(a_{1,i},\dots,a_{m,i})\right)$.

Beispiel:

plus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto a+b$ → stetig

mal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto ab$ → stetig

Beweis:

Grenzwertsätze für + und *.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_b) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ analog für *.

Satz: Die Komposition von zwei stetigen Funktionen ist stetig. D.h. wenn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

Folgerung:

Alle Polynomfunktionen (Kompositionen von + und *) sind stetig.

Polynomfunktion:

$x \mapsto a_1x^r + a_2x^{r-1} + \ldots + a_r$

$a_1,\ldots,a_r$ Koeffizienten $\in \mathbb{R}$.

Beispiel: $x^2 - 1; \quad x^{17} + 4x^3 - 5; \quad \ldots$

Weitere wichtige stetige Funktionen:

$\exp_a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}; \quad x \mapsto a^x$

$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \log_a x$ (Die eindeutig bestimmte Zahl y sodass $a^y = x$.)

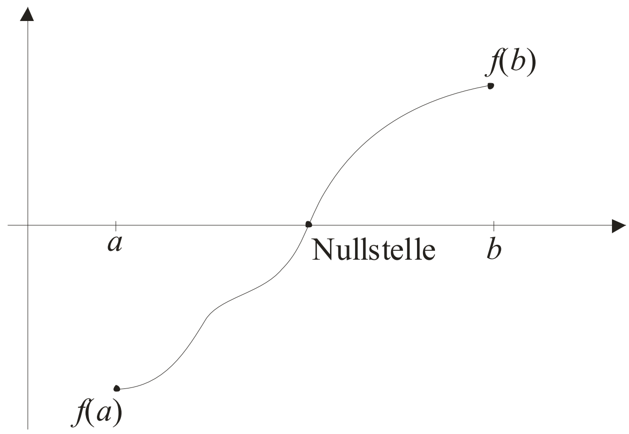
$\sin : \mathbb{R}\to\mathbb{R}; \quad x \mapsto \sin x$

$\cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R}; \quad x \mapsto \cos x$

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \tan x$

Mittelwertsatz:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Es seien $f(a)\neq 0$ und $f(b)\neq 0$ von unterschiedlichen Vorzeichen. (D.h. $f(a)<0$, $f(b)>0$ oder umgekehrt.) Dann existiert eine Nullstelle $c\in[a,b]$ und $f(c)=0$.



Da der Funktionsgraph ohne absetzen gezeichnet werden kann, muss die x-Achse irgendwann gekreuzt werden. Kreuzungspunkt → Nullstelle.

Verfahren zum Auffinden der Nullstelle: (Bisektionsverfahren) (vgl. Binäres suchen)

- Untersuche das Vorzeichen des Funktionswerts beim Mittelpunkt des Intervalls der Definitionsmenge.
- Falls 0: Nullstelle gefunden.
- Falls +/- schränke die Suche auf den linken/rechten Teil des Intervalls ein bei dem der Vorzeichenwechsel passiert.

Wie schnell konvergiert dieses Verfahren?

Nach n Schritten ist der Suchraum ein Intervall der Länge $\frac{b-a}{2^n}$.

D.h. $N\left(\frac{b-a}{2^n}\right)-n \qquad \frac{b-a}{2^n}=\Sigma$

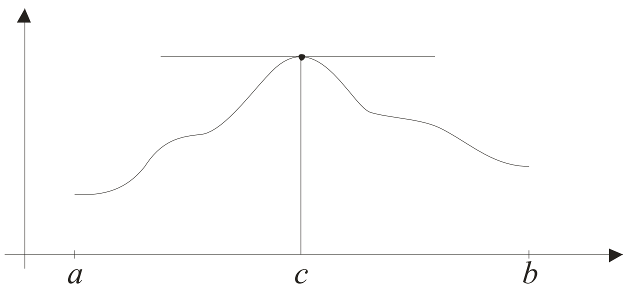
$\left(N(\Sigma)=\log_2\frac{b-a}{2}\right) \qquad 2^n=\frac{b-a}{\Sigma}$

$n=\log_2\left(\frac{b-a}{\Sigma}\right)$ → lineare Konvergenz.

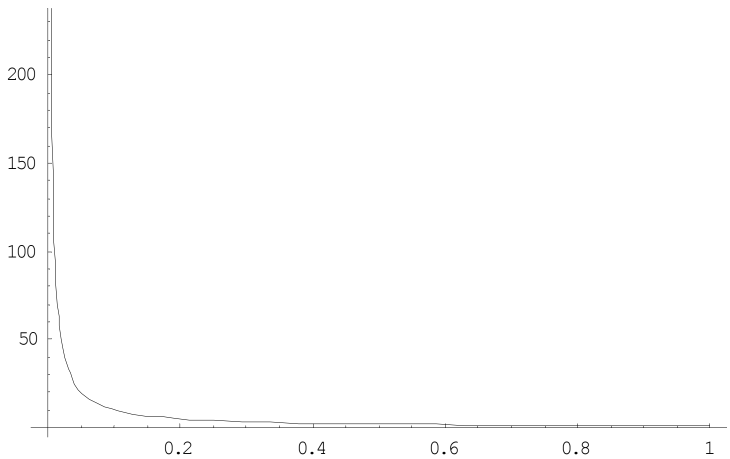
Um n Stellen zu kennen, sind $O(n)$ (Operationen) Iterationen auszuführen.

Maximumsatz:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $c\in[a,b]$ sodass $f(c)\geq f(x)$ für alle $x\in[a,b]$.



Für unstetige Funktionen muss der Maximumsatz nicht funktionieren.



$$f:[0,1]\to\mathbb{R};\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

Erweiterung des Definitionsbereichs von stetigen Funktionen

Es sei $]a,b[$ ein Intervall, $]a,b[=\{x\mid a<x<b\}$.
Weiters sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Angenommen, für jede Folge $(a_n)_n$ mit $a_n\in]a,b[$ und $\underbrace{\lim_{n\to\infty}a_n=a}_{\text{Grenzwert ist Randpunkt}}$ konvergiert

$\underbrace{\left(f(a_n)\right)_n}_{\text{Folge der Funktionswerte}}$ und der Grenzwert ist immer die selbe Zahl c.

Dann lässt sich f auf den Randpunkt fortsetzen:

$$\underbrace{\bar{f}}_{f\text{ fortges.}}:[a,b[\to\mathbb{R},\quad \bar{f}(x)=\begin{cases}f(x) & \text{falls } x\in]a,b[\\ c & \text{falls } x=a\end{cases}$$

Beispiel:

$$f:]1,2[\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\frac{x^2-1}{x-1}$$

Folge $\underline{a_n=1+\frac{1}{n}}$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}{1+\frac{1}{n}-1}=\frac{\left(\frac{n+1}{1}\right)^2-1}{\frac{1}{n}}=\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1\right)n=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}\right)n=$$

$$=\frac{\left(n^2+2n+1-n^2\right)n}{n^2}=\frac{2n+1}{n}\qquad\to\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=\underline{\underline{2}}$$

$$c=2\quad \bar{f}(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & \text{falls } x>1\\ 2 & \text{falls } x=1\end{cases}\qquad\to\text{stetig.}$$

Bemerkung:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\underline{x+1}$$

Analog spricht man von stetigen Fortsetzungen von Funktionen auf den rechten Randpunkt bzw. auf den fehlenden Punkt a im Definitionsbereich $D=\mathbb{R}-\{a\}$.

Beispiel:

$f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ist für $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ definiert und lässt sich auf x = 1 stetig fortsetzen.

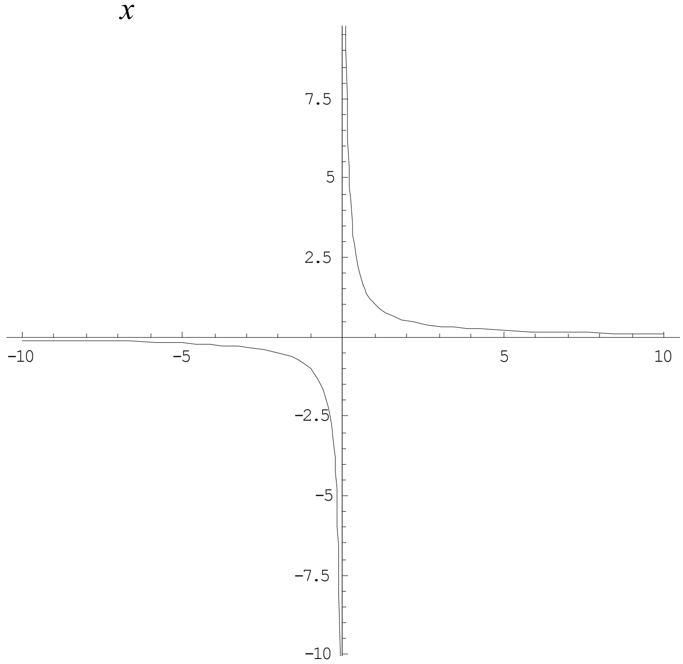
Def.: Wenn $f:D_2\to\mathbb{R}$ stetig und $\bar{f}:D_1\to\mathbb{R}$ so dass $D_1\subset D_2$ und f die Einschränkung von $\bar{f}$ auf D_1 ist, und $\bar{f}$ stetig, so heißt $\bar{f}$ eine stetige Fortsetzung von f auf D_2.

Satz: Falls $D_1=\mathbb{R}-\{a\}, D_2=\mathbb{R}$, dann gibt es höchstens eine stetige Fortsetzung.

Beispiel:

Stetige Funktion, die sich nicht fortsetzen lässt:

$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}; x\mapsto\dfrac{1}{x}$



Zusammenstückeln von stetigen Funktionen aus Funktionen die auf Intervallen definiert sind

Es seien $a=a_1<a_2<a_3<...<a_n=b$ Zahlen, die das Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle unterteilen. $[a,b]=[a_1,a_2]\cup[a_2,a_3]\cup...\cup[a_{n-1},a_n]$.

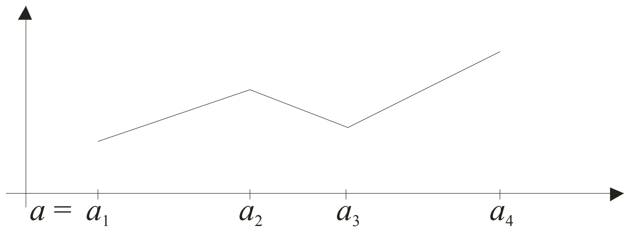
Weiters seien $f_i:[a_i,a_{i+1}]\to\mathbb{R}$ stetig ($i=1,...,n-1$).

Außerdem gelte $f_i(a_{i+1})=f_{i+1}(a_{i+1})$ (→ Randpunkte stimmen überein)

Dann ist die Splinefunktion f durch Zusammenstückeln der f_i definiert wie folgt:

$f(x)=f_i(x),$ falls $x\in[a_i,a_{i+1}]$.

Die Funktion ist stetig.

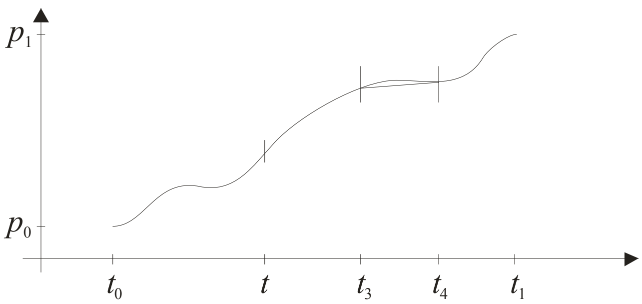


$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \in [0,\infty[\\ -x \text{ für } x \in]-\infty,0] \end{cases}$$

5. Differentialrechnung

Es sei *f* eine Zeit-Weg-Funktion.

A bewegt sich von Punkt p_0 nach p_1. Zum Zeitpunkt *f* befindet sich *A* im Punkt *f*(*t*).
$f(t_0) = p_0, \quad f(t_1) = p_1$.



Wie groß ist die Geschwindigkeit von *A* zum Zeitpunkt *t*?

Durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen Zeitpunkt t_3 und t_4?

$$\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}} = \frac{f(t_4) - f(t_3)}{t_4 - t_3}$$

Was ist aber die augenblickliche Geschwindigkeit?

Idee: Berechne die augenblickliche Geschwindigkeit als Grenzwert:

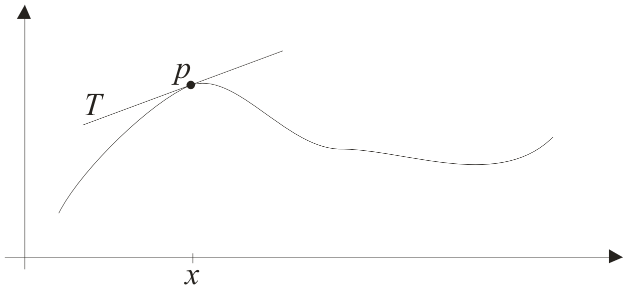
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)}{\left(t+\frac{1}{n}\right) - t}$$

Geometrischer Zugang:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

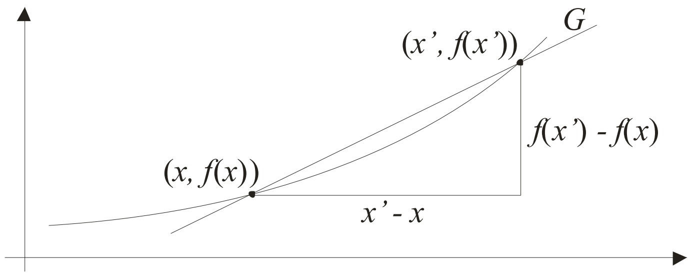
$x \in \mathbb{R}$

T … Tangente an Graph im Punkt p.



$p = \left(x, f(x)\right)$

Grenzwert-Konstruktion:



Steigung von $G = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$

Wenn x' in einer Folge gegen x konvergiert, dann konvergiert die so konstruierte Gerade G gegen die Tangente T.

Def.: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. $x \in \mathbb{R}$.
Wenn die Funktion $F_x : \mathbb{R} - \{x\} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, insbesondere auf $x = y$, dann heißt f im Punkt differenzierbar und der Wert an der Stelle x, $F_x(y) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ heißt Ableitung von f bei x.

Gebräuchliche Notationen:

- Ableitung von f bei x: $\dfrac{df}{dx}$.
- Wenn f bei jedem Punkt x differenzierbar ist dann bezeichnet man die Funktion $x \mapsto$ Ableitung von f bei x als f'.

Beispiel 1:

$f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y - x} =$$

$$= \lim_{y \to x} (y^{n-1} + yx^{n-2} + \ldots + x^{n-1})$$

$$F_x(y) := y^{n-1} + \ldots + x^{n-1}$$

$$f'(x) = F_x(x) = x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = \underline{nx^{n-1}}$$

Beispiel 2:

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^x$

Folge die gegen x konvergiert: $(y_n)_n = x + \frac{1}{n}$.

$$\lim_{y \to x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{e^{x+\frac{1}{n}} - e^x}{x + \frac{1}{n} - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^x e^{\frac{1}{n}} - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} e^x \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = e^x \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\text{von } x \text{ nicht abhängig}}$$

Die numerische Berechnung zeigt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

→ $\exp' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^x$.

Beispiel 3:

$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \ln x = \log_e(x); \quad x \in \mathbb{R}^+$

Berechne den Grenzwert: $\lim_{y \to x} \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x}$.

Folge, die gegen x konvergiert: $y_n = x \cancel{+ \frac{1}{n}}$. In diesem Fall ist eine Folge mit Produkt besser: $y_n = x(1 + \frac{1}{n}) = x + \frac{x}{n}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \ln x}{x + \frac{x}{n} - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln x}{\frac{x}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{x} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \underline{\frac{1}{x}}$$

→ $\ln' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{1}{x}$.

Rechenregeln für Ableitung

- Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$ (Summenfunktion) differenzierbar, und es gilt $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- f differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. $h(x) = \lambda f(x)$ differenzierbar, $h'(x) = \lambda f'(x)$.

→ Differenzieren ist „linear".

Beispiel:

$f(x) = 7x^3 + 14x - 2x + 5$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(x^3)' = 3x^2, (x^2)' = 2x, (x)' = 1x^0 = 1, (5)' = 0$

$f'(x) = 21x^2 + 28x - 2$ (→ Summe der Teilfunktionen $(7x^3)' = 21x^2, (14x^2)' = 28x, ...$)

Produktregel:

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Beweis:

f differenzierbar → $f(y) - f(x) = (y-x)F_x(y)$

g differenzierbar → $g(y) - g(x) = (y-x)G_x(y)$

$f'(x) = F_x(x)$

$g'(x) = G_x(x)$

$$h(y) - H(x) \quad = \quad f(y)g(y) - f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad \big(f(x) + (y-x)F_x(x)\big)\big(g(x) + (y-x)G_x(y)\big) - f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad f(x)g(x) + (y-x)F_x(y)g(x) + (y-x)G_x(y)f(x) + (y-x)^2 F_x(y)G_x(y) - f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad y - x\underbrace{\big(F_x(y)g(x) + G_x(y)f(x) + (y-x)F_x(y)G_x(y)\big)}_{H_x(y)} \quad = \quad (y-x)H_x(y)$$

$$h'(x) = H_x(x) = F_x(x)g(x) + G_x(x)f(x) + (x-x)F_x(x)G_x(x) \quad =$$

$$\boxed{= \quad f'(x)g(x) + g'(x)f(x)}$$

Quotientenregel:

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$.

Dann ist $h(x) \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bei x differenzierbar, und $\boxed{h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}}$

Kettenregel:

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann ist $h = f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f\big(g(x)\big)$ wieder differenzierbar und

$\boxed{h'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)}$.

Beispiel:

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

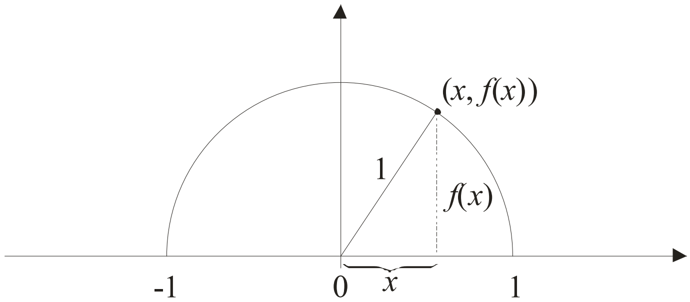
Für reelle α ist $(\ )^\alpha$ nur für positive Zahlen definiert. ($(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ ist nicht definiert.)

$$\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x \qquad / \text{ exp auf beiden Seiten}$$
$$x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{(\alpha \ln x)}$$

$$g(x) = \alpha \ln x$$
$$\exp(x) = e^{x} \qquad \text{daher } x^{\alpha} = \exp \circ g(x) = \exp\big(g(x)\big)$$
$$f'(x) = \exp'\big(g(x)\big) g'(x) = \exp\big(g(x)\big)\alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha}\alpha\frac{1}{x} =$$
$$= x^{\alpha}\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha} x^{-1} = \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}}_{\substack{\text{gleiches Ergebnis}\\ \text{für allgemeine } \alpha.}}$$

Beispiele aus den eingangs erwähnten Anschauungen für Ableitung

- Tangente an Kreis

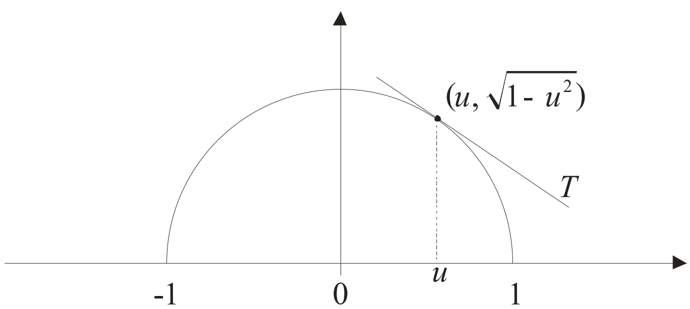


Halbkreis ist Graph der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
(Pythagoras $x^2 + \big(f(x)\big)^2 = 1$, daher $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.)

Kettenregel: $f(x) = g \circ h = g\big(h(x)\big)$ mit $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$h(x) = 1 - x^2$

$$g'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$h'(x) = -2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h(x)}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$



Steigung: $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ → $-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

Gerade *T*: $y=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}x+d$.

d ist so zu wählen, dass $\left(u,\sqrt{1-u^2}\right)$ auf *T* liegt:

$$\sqrt{1-u^2}=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}u+d$$

$$d=\sqrt{1-u^2}--\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}u$$

Gleichung der Kreistangente an $\left(u,\sqrt{1-u^2}\right)$:

$$\boxed{y=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}x+\sqrt{1-u^2}-\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}u}$$

- Weg-Zeit-Funktion für ein Teilchen im freien Fall

  Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird Körper *A* losgelassen und bewegt sich im freien Fall nach unten. $f(t)$ ist die zurückgelegte Entfernung zur Zeit t.

  Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t:

  Geschwindigkeitsdifferenz v(t) $\frac{v(t)-v(0)}{t-0}=const.$

  Erdbeschleunigung $a=9{,}81m/s^2$

  $\frac{v(t)-0}{t}=a,\quad v(t)=at$

  Suchen:

  Funktion f mit $f'(t)=at$ (“Stammfunktion“).

  $\frac{dt^n}{dt}=n\cdot f^{n-1}$ n = 2

  $\frac{dt^2}{dt}=2t$

  $\boxed{f(t)=\frac{a}{2}t^2}$ erfüllt das. Die Funktion beschreibt tatsächlich die Weg-Zeit-Abhängigkeit im freien Fall.