Mathematatik 1 (Analysis)
2. Test, 18. Juni 2004

MUSTERLÖSUNGEN

GRUPPE A

Aufgabe 1 *Die Folge a sei rekursiv gegeben durch*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Zeigen Sie, daß a konvergiert und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösung:
Einsetzen:

$$a = (1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots) \;=\; (1, 2, 1.5, 1.\overline{6}, 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, \dots)$$

Für die beiden Teilfolgen $g_n = a_{2n}$ (gerade Indizes) und $u_n = a_{2n+1}$ (ungerade Indizes) gilt:

$$g_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g_n}}, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}}. \tag{1}$$

Der Verlauf der Folge führt zur Vermutung, daß g_n monoton wächst, u_n monoton fällt, und sich das Ganze auf den Grenzwert einpendelt, also

$$g_n < g_{n+1} < u_{n+1} < u_n. \tag{2}$$

Das stimmt jedenfalls für $n = 0$:

$$1 < 1.5 < 1.\overline{6} < 2.$$

Falls (2) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann:

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{g_{n+1}} < \frac{1}{g_n}.$$

Das kann man machen, da alle a_n offensichtlich > 0 sind. Addition von $+1$ in allen Feldern der Ungleichungskette:

$$1 + \frac{1}{u_n} < 1 + \frac{1}{u_{n+1}} < 1 + \frac{1}{g_{n+1}} < 1 + \frac{1}{g_n} \text{ noch einmal Kehrwert}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{g_n}} < \frac{1}{1+\frac{1}{g_{n+1}}} < \frac{1}{1+\frac{1}{u_{n+1}}} < \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \text{ und wieder 1 addieren}$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g_n}} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g_{n+1}}} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{u_{n+1}}} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}}$$

Nach (1) gibt das

$$g_{n+1} < g_{n+2} < u_{n+2} < u_{n+1}.$$

Damit ist induktiv gezeigt, daß

$$g_n < g_{n+1} < u_{n+1} < u_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

g ist daher streng monoton wachsend, u streng monoton fallend, und $g_k < u_l \ \forall k, l \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert g gegen $\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ und u konvergiert gegen $\omega = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ und $\gamma \le \omega$. Wegen (1) gilt

$$\gamma = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}} \quad \text{und} \quad \omega = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega}} \;, \quad \text{also}$$

$$\gamma^2 - \gamma - 1 = 0 = \omega^2 - \omega - 1, \text{ und daraus folgt}$$

$$\gamma = \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Daher gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 2 *Berechnen Sie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
(Hinweis: Finden Sie einen einfachen Ausdruck für $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$*.)*

Lösung:
Berechnung von s_n. Direkt:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \cdots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

oder mit Induktion:

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$

stimmt für $n = 1$. Falls $s_n = \frac{n}{n+1}$ (für ein $n \geq 1$) gilt, folgt

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Also $s_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

$$\text{Daher } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Aufgabe 3 *Für welche* $x \in \mathbb{Q}$ *ist die Funktion*

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \ \ldots & x < \sqrt{2} \\ -1 \ldots & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Lösung:
Die Funktion ist für jedes $x \in \mathbb{Q}$ stetig, ist also global stetig. Zwei Dinge sind dafür verantwortlich: Daß $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ ist, und die Gestalt der offenen Kugeln in $\mathbb{Q}$.
Sei $x > \sqrt{2}$, also $f(x) = -1$. Die offenen Kugel um x in $\mathbb{Q}$ mit Radius $x - \sqrt{2} > 0$ ist $K^{\mathbb{Q}}_{x-\sqrt{2}}(x) = (\sqrt{2}, 2x - \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$. Alle ihre Elemente sind rationale Zahlen $> \sqrt{2}$, werden daher unter f auf -1 abgebildet. Das heißt, $f\left(K^{\mathbb{Q}}_{x-\sqrt{2}}(x)\right) = \{$-$1\} \subset K_\varepsilon(f(x))$ für jedes $\varepsilon > 0$.
Für $x < \sqrt{2}$ geht das genauso.

GRUPPE B

Aufgabe 1 *Die Folge* a *sei rekursiv gegeben durch*

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$

Zeigen Sie, daß a *konvergiert und berechnen Sie* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösung: a ist streng monoton wachsend:
$a_n < a_{n+1}$ stimmt für $n = 0$ $(1 < \sqrt{2})$. Falls es für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt durch Addieren von 1 und anschließendes Wurzelziehen (auf beiden Seiten der Ungleichung

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + a_{n+}} = a_{n+2}$$

also gilt $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, das heißt, a ist streng monoton wachsend. Wenn gezeigt ist, daß es eine obere Schranke für a gibt, folgt, daß a konvergiert und zwar gilt dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$. Den Limes kann man dann (wie in Gruppe A/Aufgabe1) aus der Rekursion berechnen:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \ \Rightarrow\ \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

daher gilt dann $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zuerst muß man aber wissen, daß a konvergent ist, und dafür reicht es jetzt, die Beschränktheit zu zeigen. Wenn wir annehmen, daß wir im Besitz einer oberen Schranke s sind, so gilt

$$a_n \leq s, \ 1 + a_n \leq 1 + s, \ \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + s}, \text{ also } a_{n+1} \leq \sqrt{1 + s}. \tag{3}$$

Wenn $\sqrt{1+s} \leq s$ möglich ist, dann liefert die letzte Zeile einen Induktionsbeweis, daß $a_n \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$ und wir sind fertig. $\sqrt{1+s} \leq s$ ist (für positives s) äquivalent mit $s^2 - s - 1 \geq 0$, und so auch mit $s \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Für $s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ funktioniert damit alles.

Aufgabe 2 *Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}.$$

<u>Lösung:</u>
Setze $a_n = \frac{n^4}{3^n}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$. Es gibt somit ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in (0, \frac{2}{3}) \ \forall n \geq N$. Daher ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{2}{3} < 1 \ \forall n \geq N$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum a$ absolut konvergent.

Aufgabe 3 *Es sei a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow [a,b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt hat, d.h., daß es ein $x \in [a,b]$ gibt, mit $f(x) = x$. (Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $F(x) = f(x) - x$ an.)*

<u>Lösung:</u>
Da $\operatorname{im}(f) \subseteq [a,b]$, gilt $a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in [a,b]$. Speziell für $x = a$ und $x = b$

$$a \leq f(a) \text{ und } f(b) \leq b.$$

Es folgt $F(a) = f(a) - a \geq 0$ und $F(b) = f(b) - b \leq 0$. Die Funktion F ist stetig; aus dem Zwischenwertsatz folgt: $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $F(x_0) = 0$, das bedeutet, $f(x_0) - x_0 = 0$, i.e., $f(x_0) = x_0$.