Musterlösung TEST 1, vom 7. Mai 2004

Aufgabe 1. $\boxed{1}$
Zeigen Sie die folgenden Aussagen über reelle Zahlen:

1. $y < |x| \;\Leftrightarrow\; (x < -y \vee y < x)$
2. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Verwenden Sie die Axiome (1) - (14) sowie die Definition von $|x|$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

1. ($\rightarrow$): Sei $y < |x|$. Falls $x \geq 0$, heißt das, $y < x$. Falls $x < 0$ bedeutet es $y < -x$, und daher $x < -y$. In jedem der beiden Fälle also $y < x \vee x < -y$.
   ($\leftarrow$): Es gelte $x < -y \vee y < x$. Wenn $x < -y$ ist, dann $y < -x \leq |x|$, also $y < |x|$. Wenn hingegen $y < x$, dann $y < x \leq |x|$, also wieder $y < |x|$.
2. Aus der Dreiecksungleichung für den Betrag folgt $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$, daher
   $$-|y - x| \leq |x| - |y| \tag{1}$$
   genauso $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, und so
   $$|x| - |y| \leq |x - y| \tag{2}$$
   Gleichung (1) und (2) gemeinsam:
   $$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$
   das heißt, $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Aufgabe 2. $\boxed{2}$
Es bezeichne $||x||$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

1. Zeigen Sie, daß die Funktion
   $$d(x, y) = \frac{||x - y||}{1 + ||x - y||} \tag{3}$$
   eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
2. Beschreiben Sie die offene Kugel $K_{\frac{1}{2}}(0, 0)$ bezüglich dieser Metrik.
3. Ist die Metrik (3) von einer Norm induziert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

1. $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, es sind die Metrik-Eigenschaften nachzurechnen.

(a) $d(x,y) \geq 0$ gilt, da Zähler und auch Nenner positiv sind. Weiters

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \text{Zaehler} = 0 \Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(b)

$$d(y,x) = \frac{||y-x||}{1+||y-x||} = \frac{||x-y||}{1+||x-y||} = d(x,y)$$

(c) Zu zeigen ist, daß $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, d.h.,

$$\frac{||x-z||}{1+||x-z||} \leq \frac{||x-y||}{1+||x-y||} + \frac{||y-z||}{1+||y-z||} \tag{4}$$

Das ist äquivalent zu

$$(1+||x-y||)(1+||y-z||)||x-z|| \leq$$
$$(1+||x-z||)(1+||y-z||)||x-y|| + (1+||x-z||)(1+||x-y||)||y-z||$$

Ist so lang; schreiben wir $a = ||x-z||,\ b = ||x-y||,\ c = ||y-z||$ als Abkürzung; a, b, c sind positive reelle Zahlen. Was wir zeigen müssen schreibt sich jetzt

$$(1+c)(1+b)a \leq (1+a)(1+c)b + (1+a)(1+b)c.$$

Ausmultiplizieren

$$a + ac + ab + abc \leq b + ab + bc + abc + c + ac + bc + abc$$

was äquivalent ist zu

$$a \leq b + c + 2bc + abc \tag{5}$$

Ungleichung (5) ist logisch aq̈uivalent zu dem, was wir zeigen wollen, soll also gezeigt werden. Aus der Dreiecksungleichung (für Normen) folgt

$$a = ||x-z|| = ||x-y+y-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = b + c$$

also, da alle vorkommenden Zahlen positiv sind,

$$a \leq b + c \leq b + c + 2bc + abc.$$

Damit ist Ungleichung (5) wahr, und somit auch Ungleichung (4).

2. $K_{\frac{1}{2}}(0,0)$ ist die offene Kugel vom Radius $1/2$ um den Koordinatenursprung, also die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) < \tfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{||x-0||}{1+||x-0||} < \tfrac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{||x||}{1+||x||} < \tfrac{1}{2}\right\} =$$
$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2||x|| < 1 + ||x||\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| < 1\right\}.$$

Da $||x||$ die (gewöhnliche) euklidische Metrik in $\mathbb{R}^2$ ist, ist das der offene Kreis (im gewöhnlichen Sinn) vom Radius 1.

3. Die Metrik d ist nicht translationsinvariant, kann also nicht von einer Norm kommen.

Aufgabe 3. $\boxed{3}$
Zeigen Sie, daß die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x-3|$ stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Schreiben wir $f(x) = |x-3|$. Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, (aber als fest gewählt gedacht), und $\varepsilon > 0$. Man soll ein $\delta > 0$ angeben, so, daß für beliebige Zahlen y, $|y-x| < \delta$ zur Folge hat, daß $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$, d.h., $\big||y-3|-|x-3|\big| < \varepsilon$. Jetzt gilt

$$\big||y-3|-|x-3|\big| \leq |y-3-(x-3)| = |y-x|.$$

Wenn daher $\delta = \varepsilon$ und $|y-x| < \delta$, dann folgt doch $\big||y-3|-|x-3|\big| < \varepsilon$.

f ist also stetig in x. Da x beliebig war, ist f global stetig.

Es wäre aber auch möglich so zu argumentieren: f ist die Komposition von $x \mapsto x-3$ mit $x \mapsto |x|$. Beide sind stetig (kann man mit $\epsilon - \delta$ schnell zeigen), also auch die Komposition f.

Aufgabe 4. $\boxed{4}$
Konstruieren Sie eine Bijektion $f\colon (-5,1) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Da wir eine Bijektion $\phi\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ kennen, nämlich

$$\phi(t) = \frac{t}{1-|t|},$$

mit Inverser Funktion

$$\phi^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1),\ \phi^{-1}(t) = \frac{t}{1+|t|},$$

braucht man nur eine Bijektion $\psi\colon (-5,1) \leftrightarrow (-1,1)$ anzugeben und $\phi \circ \psi$ zu bilden. Für ψ kann man eine lineare Funktion nehmen,

$$\psi\colon (-5,1) \longrightarrow (-1,1),\ x \mapsto \frac{x+2}{3}.$$

$$(\phi \circ \psi)(x) = \phi\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{x+2}{3-|x+2|}.$$

Aufgabe 5. $\boxed{5}$
Es sei $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$.

1. Betrachten Sie A als Teilmenge von $\mathbb{R}$ (mit euklidischer Metrik). Bestimmen Sie A°, $\overline{A}$ und die Menge aller äußeren Punkte von A.
2. Betrachten Sie A als (metrischen) Teilraum von $\mathbb{R}$ (mit euklidischer Metrik). Beschreiben sie die offenen Mengen von A. Ist der Raum A zusammenhängend?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

1. $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$. Die Menge der äußeren Punkte von A ist

$$(\overline{A})^c = \mathbb{R} \setminus \overline{A} = (A \cup \{0\})^c = A^c \cap \{0\}^c = A^c \setminus \{0\}.$$

2. Jeder Punkt in A ist selbst eine offene Kugel (von geeignetem positiven Radius), also offen. Da die Vereinigung offener Mengen wieder offen ist, ist jede Menge $B \subseteq A$ offen in A ($B = \bigcup_{b \in B} \{b\}$). A ist nicht zusammenhängend; jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist ein clopen.

Aufgabe 6. $\boxed{6}$

1. Es sei $x \mapsto ||x||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Leiten Sie die Ungleichung

$$\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y|| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

aus den definierenden Eigenschaften für eine Norm her.

2. Es sei f die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, daß f stetig ist. Sie können dafür die Ungleichung (6) verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

1. Das geht genauso wie Aufgabe 1.2.
2. f ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ (die euklidische). Daher gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq ||x - y|| < \varepsilon$$

wenn $||x - y|| < \delta = \varepsilon$.