Mathematik 1 (Analysis)

J. Schicho

Vorlesungsmitschrift SS 2003

INHALT

1. Funktionen

Darstellung von Funktionen

- Wertetabelle

  Beispiel: A = {1, 2, 3, 4}
  B = {A, B, C, D, …, X, Y, Z}

1	A
2	A
3	Z
4	X

- Graph

  xy-Ebene ist ein Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$.
  d.h. $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ (Menge aller Paare bzw. Produktmenge.

  Wenn A und B endlich sind:
  Produktmenge = {(1, A), (1, B), …, (2, A), …, (4, Z)}
  f = {(1, A), (2, A), (3, Z), (4, X)}

- Funktionsvorschrift

  $x \mapsto x^2$

  Schreibweise: $f : A \to B; x \mapsto Ausdruck$
  A … Urmenge, Menge der Stellen
  B … Bildmenge
  Ausdruck … Funktionsvorschrift

  Beispiel:

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; 2x \mapsto x^2$ (→ falsche Syntax)

  $$\downarrow$$

  $$2x = y$$

  $$x = \frac{y}{2}$$

  $$x^2 = \frac{y^2}{4}$$

  $$y \mapsto \frac{y^2}{4}$$

$f^{-1} \circ f : A \to A$ $\quad$ id_A identisch
$f \circ f^{-1} : B \to B$ $\quad$ id_B identisch

Eine Funktion $g : B \to A$ und für die $g \circ f = id_A$ ist, heißt linksinverse Funktion von *f*.

Berechnen der inversen Funktion falls die Funktion durch Term gegeben ist.

$f : A \to B; x \mapsto F(x)$

Ansatz:

$$y = F(x)$$
$$y = 7x - 2$$
$$y + 2 = 7x \qquad \text{Versuch x auf eine Seite zu bringen}$$
$$\frac{y+2}{7} = x$$

Umkehrfunktion: $f^{-1} : B \to A; y \mapsto \frac{y+2}{7}$

Weitere Bezeichnungen:

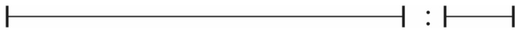
$f : A \to B$ sei eine beliebige Funktion
Das Bild von *f* geschrieben *f*(*A*) ist die Funktion definiert als
$\{b \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ so dass } f(a) = b\}$.
Es gilt: $f(A) \subseteq B$
$f(A) = B$ → *f* surjektiv.

Jede Funktion $f : A \to B$ induziert eine Relation $\sim_f$ durch $a_1 \sim_f a_2 \Leftrightarrow f_{(a_1)} \sim f_{(a_2)}$.
Das ist eine Äquivalenzrelation d.h.

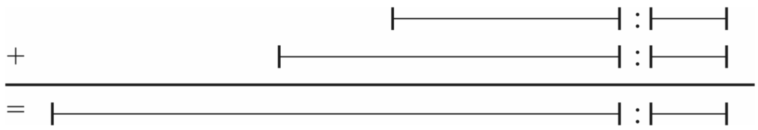
$$a_1 \sim a_1 \qquad \text{Reflexivität}$$
$$a_1 \sim a_2 \Rightarrow a_2 \sim a_1 \qquad \text{Symmetrie}$$
$$a_1 \sim a_2 \wedge a_2 \sim a_3 \Rightarrow a_1 \sim a_3 \qquad \text{Transitivität}$$

2. Reelle Zahlen

"Antike Def.": Eine reelle Zahl ist eine Proportion von zwei messbaren Größen.

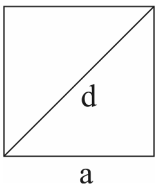
Bsp:  = 2,1

"Rechenoperationen" sind in der Regel geometrisch definiert.
Bsp. Addition:



Vermutung: Jede Proportion lässt sich beschreiben als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen.

Falsch: Das Verhältnis von Seite und Diagonale eines Quadrats lässt sich nicht durch Zahlen ausdrücken.
"irrationale Proportion"



$d : s = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl der Form $\frac{p \in \mathbb{Z}}{q \in \mathbb{Z}}$.

Einführung des Dezimalsystems

Def.: Eine Dezimalzahl ist eine endliche Kette von Zeichen aus {0, 1, …, 9, ., +, -} mit folgenden syntaktischen Eigenschaften:
[+ | -] Zahlen . Zahlen

1,0 : 3,0 = 0,3333… → kein endlicher String

Def. 1: Ein unendlicher String aus einem Alphabet Σ (in unserem Fall {0, 1, …, 9, ., +, -}) ist eine Zeichenkette die nie abbricht.

Def. 2: Ein String ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \Sigma$
z.B.: 1,234 wobei

1	,	2	3	4
$f(1)$		$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

Def. 3: Eine unendliche Dezimalentwicklung ist ein unendlicher String aus dem Alphabet Σ (wie oben), mit den obigen syntaktischen Beschränkungen.

Problem: $\left.\begin{matrix} 0,999999... \\ 1,000000... \end{matrix}\right\}$ müssten die selben reellen Zahlen sein.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf den unendlichen Dezimalentwicklungen.

$a \sim b \Leftrightarrow a = b$

oder

a endet mit einer unendlichen Folge von 9en,
b endet mit einer unendlichen Folge von 0en
und der Teil vor diesen beiden unendlichen Folgen unterscheidet sich um 1 oder umgekehrt.

z.B.: 0,23999… ~ 0,24000…

→ Def: Eine reelle zahl ist eine Äquivalenzklasse von Dezimalentwicklungen.

Beobachtung: Jede Klasse hat entweder ein oder zwei Elemente, d.h. jede reelle Zahl besitzt entweder eine oder zwei Dezimalentwicklungen.

Darstellung von unendlichen Dezimalentwicklungen am Computer

Periodische Dezimalentwicklung

0,3333333… = 0,'3'

d.h. Σ wird erweitert mit ', was die Periode markiert.

0,23'9'

1,'0' : 7,'0' = 0,'142857'

Satz: Jede rationale zahl lässt sich als periodische Dezmalentwicklung darstellen.

Nichtperiodische Dezimalentwicklungen:

π = 3.14159265358979323846264338328…
α = 0,12345678910111213141516171819202122…
$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872421…

α lässt sich endlich beschreiben durch ein kurzes Programm (Algorithmus) dass diese unendliche Zeichenkette ausdrückt.
Unendliche Dezimalentwicklungen die sich durch eine Turingmaschine (Programm) endlich beschreiben lassen heißen gesetzmäßig oder berechenbar.

Wie rechnet man mit diesen reellen Zahlen?

(d.h. Klassen von unendlichen Dezimalentwicklungen)

Bsp.: Addition

Versuch 1: Verschiebe so dass "," untereinanderstehen.

$$\begin{array}{r} 23{,}147908... \\ \underline{+\quad 0{,}053664...} \end{array}$$

→ Die Methode wie bei endlichen Dezimalzahlen "von rechts nach links" ist hier nicht möglich.

Versuch 2: Abbruch bei *n*-ter Stelle hinter "," für *n* = 1, 2, 3, 4, 5, …

$$\begin{array}{r} 23{,}1 \\ +\quad 0{,}0 \\ \hline 23{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}14 \\ +\quad 0{,}05 \\ \hline 23{,}19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}147 \\ +\quad 0{,}053 \\ \hline 23{,}200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23{,}1479 \\ +\quad 0{,}0536 \\ \hline 23{,}2015 \end{array}$$

Summe ist 23,2015… → scheint zu funktionieren

Das Ergebnis ergibt sich als Grenzwert einer Folge
$a_1 = 23{,}1;\quad a_2 = 23{,}19;\quad ...$
Grenzwert: $\lim\limits_{1\to\infty} a_n = 23{,}201...$ (näheres über Grenzwert später)

Dieser Versuch zielt darauf ab, eine Turingmaschine "T+" zu konstruieren, die drei Bänder hat. (Zwei Lese- und ein Schreibband). Auf den ersten beiden Bändern werden die Eingaben (Summanden) geschrieben (durch eine Turingmaschine "T_A" und "T_B") und auf das Ausgabeband das Ergebnis.
Band 1: 0,33333…
Band 2: 0,66666…

Um die erste Ziffer des Resultates zu berechnen müsste "T+" unendlich weit nach rechts lesen. Wenn die beiden Eingaben wie oben sind kann "T+" die erste Ziffer des Resultats nicht schreiben. → lässt sich reparieren durch die zusätzliche Ziffer -1.

Bsp.: 0,3333~~3~~2
0,6666~~6~~6
1,0000-1

Def.: Eine reelle Zahl heißt berechenbar wenn sie sich beliebig genau approximieren lässt, d.h. es gibt ein Programm, das bei Eingabe n eine (endliche) Dezimalzahl a_n ausgibt, so dass $|a_n - \alpha| \le 10^{-n}$.

3. Folgen und Reihen

Def.: Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notation: Ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, so schreiben wir a_n für $a(n)$.
Die Funktion $n \mapsto a_n$ wird geschrieben $(a_n)_n$.

→ Arithmetische Folge: $a_n = kn + d$
$(d, d+k, d+2k, \ldots)$
$(kn+d)_n$

→ Konstante Folge: $c_n = (c, c, c, c, ...)$

→ Geometrische Folge: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = const.$
$a_n = aq^n; \quad (aq^n)_n$
$(a, aq, aq^2, aq^3, \ldots)$

→ Rekursiv definierte Folge: $a_0 = a; \quad a_{n+1} = qa_n$ (rekursive def. der geometrischen Folge)
Fibonecci-Folge: $a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
Spezialfall: Iteration von F: $a_0 = a; \quad a_{n+1} = f(a_n)$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beilspiel: $f : x \mapsto \cos x$, d.h. $a_0 = 0; \quad a_{n+1} = \cos a_n$
(1; 0,540; 0,858; 0,654; 0,793; 0,791; 0,764; 0,723; 0,750; …)
Grenzwert: 0,739.
Konvergiert gegen einen Fixpunkt von *f*. In diesem Fall: $\cos(0,739) = 0,739$.

Ein Wert x sodass $f(x) = x$ heißt Fixpunkt von *f*. Iterationen von Funktionen führen zu Fixpunkten. „Attraktive Fixpunkte“ x sond solche, bei denen rekursive Folgen $a_{n+1} = f(a_n)$ gegen x konvergieren, wenn der Startwert a_0 in einem Intervall um x liegt. („Attraktionsgebiet“).
Das muss nicht immer so sein:

Beispiel: Iteration $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 4x(1-x)$
$$a_0 = \frac{1}{3}; \quad a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$$
Die Folge hat keinen Grenzwert, sondern zeigt chaotisches Verhalten im Intervall [0,1]. (Intervall $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$)
Die Folge kommt jeder Zahl $\alpha \in [0,1]$ unendlich oft beliebig nahe.

Eigenschaften von Folgen

Def.: $(a_n)_n$ heißt monoton steigend (fallend) wenn für alle n gilt $a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n)$.

$(a_n)_n$ heißt streng monoton steigend (fallend) wenn für alle n gilt
$a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n)$.

Beispiel: $(k_n + d)_n$ ist $\begin{cases} \text{monoton steigend wenn } k \geq 0 \\ \text{monoton fallend wenn } k \leq 0 \\ \text{streng monoton steigend wenn } k > 0 \\ \text{streng monoton fallend wenn } k < 0 \end{cases}$

$(a_n)_n$ heißt nach oben beschränkt (nach unten beschränkt) wenn es eine Zahl M gibt sodass für alle n gilt $a_n \leq M \quad (a_n \geq M)$.

Beispiel: $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ ist nach unten durch 0 ($a_n = \frac{n+2}{n+1} \geq 0$)
und ist nach oben durch 2 beschränkt ($a_n = \frac{n+2}{n+1} \leq 2$).

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} &\leq 2 \\ n+2 &\leq 2(n+1) \\ n+2 &\leq 2n+2 \\ 0 &\leq n \end{aligned}$$

ist richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge heißt genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

~~Geometrische Folge $(2^n)_n$ ist unbeschränkt.~~
~~Wähle $M := 3^n$ dann gilt $2^n \leq 3^n$, daher ist $(a^n)_n$ beschränkt.~~

Wichtig: Zuerst M wählen, unabhängig von n!

Proposition (Sätzchen):
Jede monoton steigende Folge ist nach unten beschränkt.
Jede monoton fallende Folge ist nach oben beschränkt.

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt ***Nullfolge*** wenn es für jedes Intervall $[-\Sigma \mid \Sigma]$ um 0 (d.h. $\Sigma > 0$) gilt dass nur endlich viele Folgeglieder außerhalb liegen. (Das heißt die Folge bleibt beliebig nahe bei 0, konvergiert gegen 0).

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge

$\Sigma = 10^{-6}$

Fast alle Folgeglieder a_n liegen im Intervall $[-10^{-6} \mid 10^{-6}]$, denn

$a_n \geq 0 \geq -10^{-6}$

$a_n \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow n \geq 10^6$

Die Folgeglieder ($a_{1000000}, a_{1000001}, ...$) sind alle im Intervall.

Beispiel: $(aq^n)_n$ ist eine Nullfolge wenn $|q|<1$.

Insbesondere sind Nullfolgen beschränkt.

Grenzwert

Def 1.: Die Folge $(a_n)_n$ hat den Grenzwert a genau dann, wenn die Folge $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist.

Def 2.: (äquivalent dazu): Die Folge $(a_n)_n$ hat den Grenzwert a, wenn für jedes Intervall $[a - \Sigma \mid a + \Sigma]$ $(\Sigma > 0)$ gilt, dass nur endlich viele Glieder außerhalb liegen.

Beispiele: $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ hat den Grenzwert 1.

$a_0 = 0;\quad a_{n+1} = \cos a_n$ hat den Grenzwert a=0,739…

Def.: Sei $(a_n)_n$ eine Folge $a \in \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl a heißt Häufungswert der Folge, wenn jedes Intervall $[a - \Sigma \mid a + \Sigma]$ $(\Sigma > 0)$ unendlich viele Folgeglieder enthält.

Beispiele: $(a(-1)^n)_n$ besitzt zwei Häufungswerte, nämlich a und $-a$.

(a, -a, a, -a, a, …)

$\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \right)_n$ besitzt zwei Häufungswerte, nämlich 1 und -1.

(-1; 1,5; -1,33; 1,25; -1,2; 1,17; …)

Diese Folge besitzt zwei Teilfolgen mit Grenzwert -1, 1.

Satz: Sei $(a_n)_n$ eine Folge $a \in \mathbb{R}$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) a ist Häufungswert der Folge $(a_n)_n$.
2) Es existiert eine Teilfolge $(b_n)_n = \left(a_{f(n)}\right)_n$ mit Grenzwert a.

Grenzwert Notation

a ist Grenzwert von $(a_n)_n$.

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$ Falls $(a_n)_n$ keinen Grenzwert besitzt, so hat der Ausdruck $\lim_{n\to\infty} a_n$ keinen Wert.

Rechenregeln für den Grenzwert

Addition und Multiplikation von Folgen erfolgt Gliedweise.

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$$
$$(a_n)_n \cdot (b_n)_n = (a_n \cdot b_n)_n$$

Wenn $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren (d.h. es existiert ein Grenzwert) so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Beispiel: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1$

Nebenrechnung: $\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

Konvergenzrate ist eine Funktion $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ so dass für alle Σ, n gilt:
Wenn $n \geq N(\Sigma) \Rightarrow a_n \in [a - \Sigma, a + \Sigma]$.

Beispiel:

Wenn z.B. $\Sigma = 10^{-6}$, dann liegen alle Folgeglieder ab $N(10^{-6})$ in einem 10^{-6}-Intervall um den Grenzwert.
D.h. um den Grenzwert bis auf Genauigkeit 10^{-6} zu bestimmen, reicht es das $N(10^{-6})$-te Glied auszurechnen.

Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ $N(10^{-6})=10^{-6}$

Grenzwert ist höchstens 10^{-6} von $a_{1000000}$ entfernt.
→ sehr schlechte Konvergenz.

$(a_n)_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ Grenzwert $e = 2,7182...$

um 4 Stellen berechnen zu können sind 10000 Berechnungen nötig.
→ schlechte Konvergenz.

Gute Konvergenz: Geometrische Folge ($|q|<1$)

$q = \frac{1}{2}, \quad a = 1; \qquad \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_n$

Konvergenzrate: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Für Konvergenzrate $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ muss gelten $a_{N(\Sigma)} \in [-\Sigma, \Sigma]$

$a_n \in [-\Sigma \mid \Sigma]$ für $n \geq N(\Sigma)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \geq -\Sigma$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \leq \Sigma \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{1}{\Sigma} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log\frac{1}{\Sigma}}{\log 2} = \log_2 \frac{1}{\Sigma}$$

$\Sigma = 10^{-6}$

$$N(\Sigma) = \frac{\log 10^6}{\log 2} = \frac{6}{0,27} = 18$$

Wenn $N(\Sigma) \sim \log\left(\frac{1}{\Sigma}\right)$ (Anm.: ~…proportional)

(d.h. um *m* Stellen zu berechnen ($\Sigma = 10^{-6}, N(\Sigma) \sim m$) braucht man $\sim_m$ Folgeglieder), so heißt die Konvergenz linear.

Behauptung: Die Folge $a_0 = 0, a_{n+1} = \cos a_n$ konvergiert linear.

Noch schnellere Konvergenz: Quadratische Konvergenz.

Um *m* Stellen zu berechnen braucht man ca. log *m* Folgeglieder.

Beispiel: $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$ → quadratisch konvergierende Folge.

Groß O- und klein o-Notation

(wichtig für Folgen ohne Grenzwert)

Def.: Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen reeller Zahlen. Man sagt:

- a_n ist ein $O(b_n)$ wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ beschränkt ist.
- a_n ist ein $o(b_n)$ wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ eine Nullfolge ist.

Beispiele:

- $a_n = (n+1)(n+2)$

  $b_n = n^2$

  $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} = \frac{n^2+3n+2}{n^2} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, insbesondere ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ beschränkt.

  Daher ist a_n ein $O(b_n)$.

  → $(n+1)(n+2)$ wächst höchstens quadratisch.

- $a_n = n \cdot \sqrt{n} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{2}{3}}$

  $b_n = n^2$

  $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2} = n^{\frac{2}{3}-2} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$ → Nullfolge

  Daher ist a_n ein $o(b_n)$.

Proposition:

- Wenn a_n ein $o(b_n)$ ist, dann ist es auch ein $O(b_n)$.
- Wenn a_n ein $O(b_n)$ und b_n ein $O(c_n)$ ist, dann ist auch a_n ein $O(c_n)$.

  Beweis:

  $$\frac{c_n}{a_n} = \frac{c_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{a_n}$$

  Wenn $\left|\frac{c_n}{b_n}\right| < M_1$, $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \le M_2$, dann ist $\left|\frac{c_n}{a_n}\right| \le M_1 \cdot M_2$
- Wenn a_n ein $o(b_n)$ und b_n ein $o(c_n)$ ist, dann ist auch a_n ein $o(c_n)$.
- Wenn a_n und b_n beide $O(c_n)$ sind, dann auch $a_n + b_n$ bzw. $a_n - b_n$.
- Wenn a_n und b_n beide $o(c_n)$ sind, dann auch $a_n + b_n$ bzw. $a_n - b_n$.
- n^a ist $o(n^b)$ falls $a < b$.
- $\log n$ ist $o(n)$.
- n^k ist $o(2^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Laufzeit eines Algorithmus:

Wenn die Eingabe Länge n hat, terminiert der Algorithmus z.B. nach höchstens

$\sin\frac{n}{2} + \log(n) + n^{\frac{5}{3}} + 2^n + 7$ Schritten.

→ einfachere, aber fast genauso informative Aussage:

Die Anzahl der Schritte bis zur Termination ist ein $O(2^n)$. (2^n wächst am stärksten.)

Reihen

Sei $(a_n)_n$ eine Folge.
Wir definieren die folgenden Teilsummen:

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \\
s_n &= a_0 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i
\end{aligned}$$

Jede Folge ist eine Reihe.

Beweis: Sei $(b_n)_n$ eine beliebige Folge.
Definiere $(a_n)_n$ durch $a_0 = b_0, \quad a_n = b_n - b_{n-1}$.

Dann ist $\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &= \cancel{b_0} + \cancel{b_1} - \cancel{b_0} + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \ldots + b_n - b_{n-1} = b_n \end{aligned}$

fundamentales Beispiel:

$(a_n)_n = (a \cdot q^n)_n, \quad a, q \in \mathbb{R}$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} (a \cdot q^i) = a \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i$$

$$\left.\begin{aligned}
s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n \\
q \cdot s_n &= aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} \\
a + q \cdot s_n &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = s_{n+1}
\end{aligned}\right\} \text{rekursive Darstellung}$$

$\boxed{s_0 = a, \quad s_{n+1} = a + q \cdot s_n}$ → rekursive Definition der geometrischen Reihe.

Die Reihe besitzt einen Grenzwert, falls $|q| < 1$.
Das ist der Fixpunkt der Funktion $x \mapsto a + qx$.
Berechnung des Grenzwerts:

$$\begin{aligned}
x &= a + qx \\
x - qx &= a \\
x(1-q) &= a \\
x &= \frac{a}{1-q}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \qquad \rightarrow \underline{\sum_{i=0}^{\infty} (aq^i) = \frac{a}{1-q}}$$

Beispiel Achilles

Achilles läuft 10 mal so schnell wie die Schildkrod. Schildkrod hat einen Vorsprung von 100m.

Distanz bei der Achilles Schildkrod einholt:

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}100\left(\frac{1}{10}\right)^i=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}=111,\dot{1}\,\mathrm{m}$$

Konvergenzkriterien für Reihen

- notwendiges Kriterium: falls Reihe konvergiert ist dieses erfüllt.
- hinreichendes Kriterium: falls Kriterium erfüllt, ist Reihe konvergent.

Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine Folge.

Die Reihe $(s_n)_n=\left(\sum_{i=0}^{n}a_n\right)_n$ kann nur dann konvergent sein, wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist. (notwendiges Kriterium).

Beispiel:

Geometrische Reihe: Quotient $q = 1$, $a = 1$.

$$\sum_{i=0}^{\infty}aq^i=\sum_{i=0}^{\infty}1^i=\sum_{i=0}^{\infty}1=1+1+1+...$$

→ Grenzwert existiert nicht, da $(1)_n$ keine Nullfolge ist.

$q = -1$, $a = 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty}aq^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i=1-1+1-1+1-...$$

→ Grenzwert existiert nicht. (2 Häufungswerte, 0 und 1).

Beispiel einer Nullfolge, deren Reihe der Teilsummen keinen Grenzwert hat.

„Harmonische Reihe“

$$a_n\frac{1}{n}\quad s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\qquad\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$$

Beweis: Abschätzung durch eine andere Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\frac{1}{32}+...$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...=\infty$$

Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wenn zwei reelle Zahlen $a,q < 1$ existieren, so dass $|a_n| \leq aq^n$ für alle n, dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Beweis:

Idee: Die Reihe ist „kleiner" als eine geometrische Reihe. Von der geometrischen Reihe weiß man dass ein Grenzwert existiert.

Beispiel.:

$$a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$$

Grenzwert $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \cdot i}$ existiert weil $\frac{1}{2^n \cdot n} \leq \underset{a}{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{q<1}$. (hinreichendes Kriterium)

Zweites hinreichendes Kriterium:

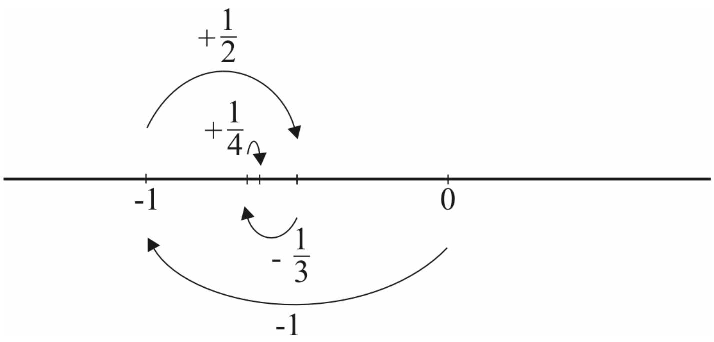
Satz: Es sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$.

Beispiel:

$$(a_n)_n = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)\frac{1}{i} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

Grenzwert existiert:



Beweis:

Das Intervall zwischen s_n und s_{n+1} enthält alle nachfolgenden Teilsummen. Die Länge des Intervalls ist a_{n+1} und das ist eine Nullfolge.

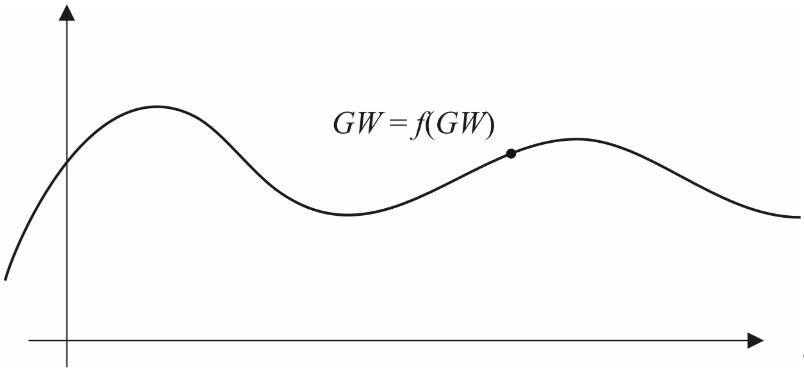
Folgen von Elementen im $\mathbb{R}^2$. D.h. Paare $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3),\ldots$ oder Punkte in der Ebene. Irgendwo in der Ebene gibt es eine Häufungsstelle → Grenzwert.

Def.: Folge $((a_n,b_n))_n$ von Elementen in $\mathbb{R}^2$ heißt beschränkt wenn es eine Zahl M gibt so dass für alle n gilt $-M \leq a_n \leq M$ und $-M \leq b_n \leq M$. (quadratisches Kastl).

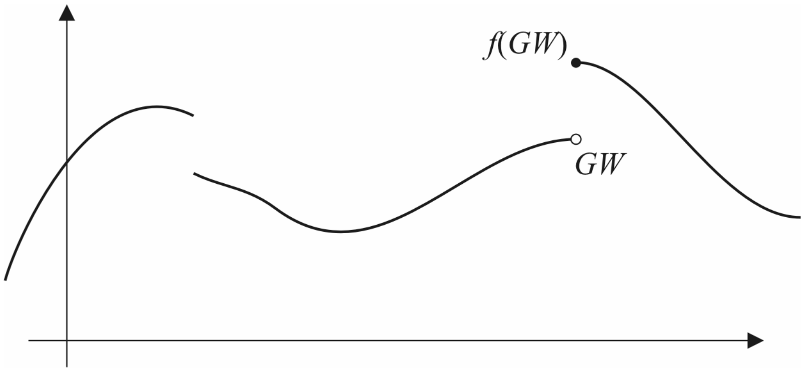
Def 1.: Ein Element (a,b) ist Grenzwert der Folge $\left((a_n, b_n)\right)_n$ wenn es für jedes $\Sigma > 0$ einen Index N gibt so dass alle nachkommenden Folgeglieder (a_{N+n}, b_{N+n}) in einer Σ - Umgebung von (a,b) liegen. (In einem Kreis mit Mittelpunkt (a,b) und Radius Σ.

Def 2.: Eine Folge $\left((a_n, b_n)\right)_n$ ist konvergent wenn die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beide konvergent sind. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

4. Stetigkeit



→ stetige Funktion



→ unstetige Funktion

Weg-Zeit-Funktionen sind immer stetig.

Def.: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion.
Dann heißt *f* stetig wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_n$ gilt die Folge der Funktionswerte $\left(f(a_n)\right)_n$ ist ebenfalls konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.
(Limesanwendung und Funktion werden vertauscht.)

Vorteil dieser Definition gegen über „zeichnen ohne abzusetzen“: Sie lässt sich verallgemeinern auf Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, bzw. $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$.

Def.: Eine Funktion $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ heißt stetig wenn für jede konvergente Folge $(a_{1,i},...,a_{m,i})_i$ im $\mathbb{R}^m$ die Folge der Funktionswerte $\left(f(a_{1,n},...,a_{m,i})\right)_i$ konvergiert und $\lim\limits_{i\to\infty} f(a_{1,i},...,a_{m,i})_i = f\left(\lim\limits_{i\to\infty}(a_{1,i},...,a_{m,i})\right)$.

Beispiel:

plus $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (a,b)\mapsto a+b$ → stetig
mal $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (a,b)\mapsto ab$ → stetig

Beweis:

Grenzwertsätze für + und *.
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_b) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ analog für *.

Satz: Die Komposition von zwei stetigen Funktionen ist stetig. D.h. wenn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

Folgerung:

Alle Polynomfunktionen (Kompositionen von + und *) sind stetig.
Polynomfunktion:

$x \mapsto a_1 x^r + a_2 x^{r-1} + \ldots + a_r$

$a_1,\ldots,a_r$ Koeffizienten $\in \mathbb{R}$.

Beispiel: x^2-1; $x^{17}+4x^3-5$; ...

Weitere wichtige stetige Funktionen:

$\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto a^x$

$\log_a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \log_a x$ (Die eindeutig bestimmte Zahl y sodass $a^y = x$.)

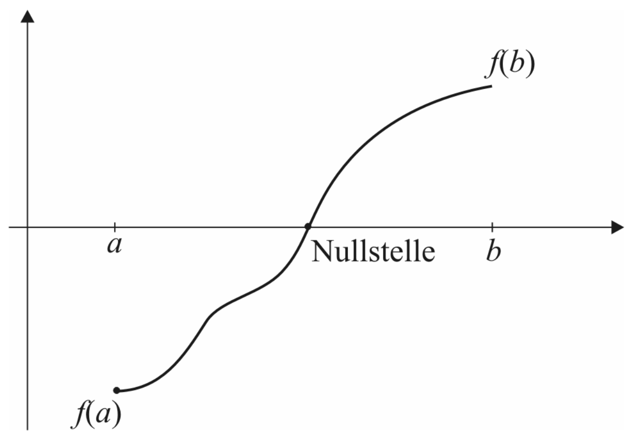
$\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \sin x$

$\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \cos x$

$\tan:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \tan x$

Mittelwertsatz:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Es seien $f(a)\neq 0$ und $f(b)\neq 0$ von unterschiedlichen Vorzeichen. (D.h. $f(a)<0$, $f(b)>0$ oder umgekehrt.) Dann existiert eine Nullstelle $c\in[a,b]$ und $f(c)=0$.



Da der Funktionsgraph ohne absetzen gezeichnet werden kann, muss die x-Achse irgendwann gekreuzt werden. Kreuzungspunkt → Nullstelle.

Verfahren zum Auffinden der Nullstelle: (Bisektionsverfahren) (vgl. Binäres suchen)

- Untersuche das Vorzeichen des Funktionswerts beim Mittelpunkt des Intervalls der Definitionsmenge.
- Falls 0: Nullstelle gefunden.
- Falls +/- schränke die Suche auf den linken/rechten Teil des Intervalls ein bei dem der Vorzeichenwechsel passiert.

Wie schnell konvergiert dieses Verfahren?

Nach n Schritten ist der Suchraum ein Intervall der Länge $\frac{b-a}{2^n}$.

D.h. $N\left(\frac{b-a}{2^n}\right)-n \qquad \frac{b-a}{2^n}=\Sigma$

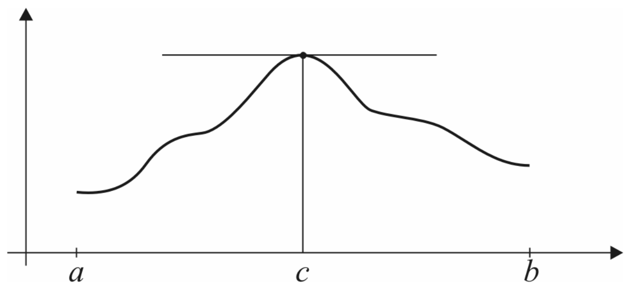
$\left(N(\Sigma)=\log_2\frac{b-a}{2}\right) \qquad 2^n=\frac{b-a}{\Sigma}$

$n=\log_2\left(\frac{b-a}{\Sigma}\right)$ → lineare Konvergenz.

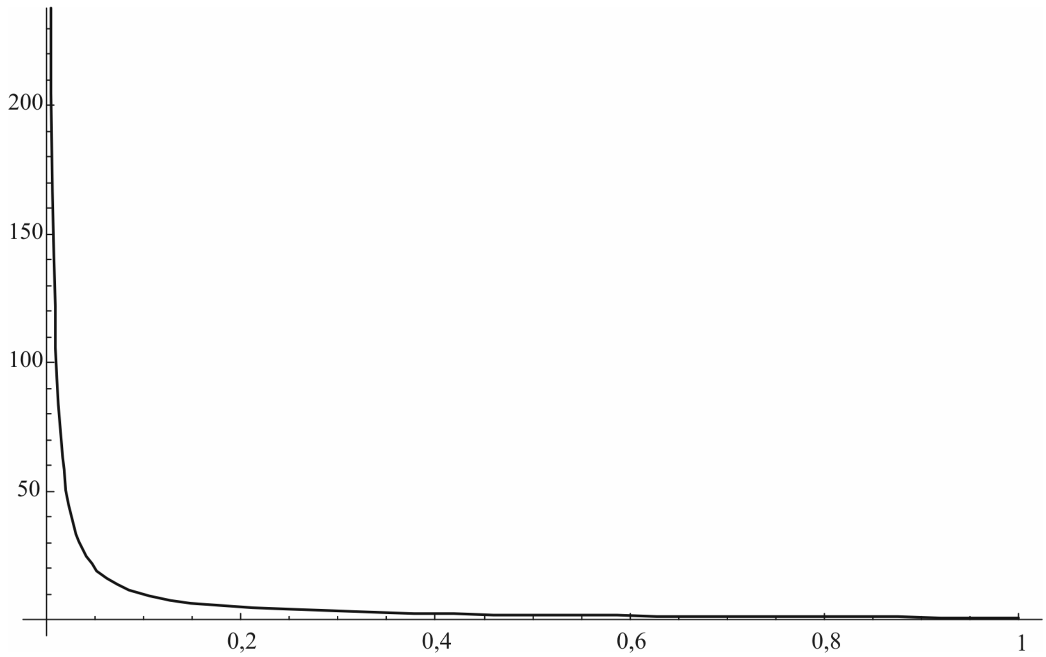
Um n Stellen zu kennen, sind $O(n)$ (Operationen) Iterationen auszuführen.

Maximumsatz:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $c\in[a,b]$ sodass $f(c)\geq f(x)$ für alle $x\in[a,b]$.



Für unstetige Funktionen muss der Maximumsatz nicht funktionieren.



$$f:[0,1]\to\mathbb{R};\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}$$

Erweiterung des Definitionsbereichs von stetigen Funktionen

Es sei $]a,b[$ ein Intervall, $]a,b[= \{x \mid a < x < b\}$.
Weiters sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Angenommen, für jede Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in]a,b[$ und $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n = a}_{\text{Grenzwert ist Randpunkt}}$ konvergiert $\underbrace{\left(f(a_n)\right)_n}_{\text{Folge der Funktionswerte}}$ und der Grenzwert ist immer die selbe Zahl c.

Dann lässt sich f auf den Randpunkt fortsetzen:

$$\underbrace{\bar{f}}_{f \text{ fortges.}} : [a,b[\to \mathbb{R}, \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in]a,b[\\ c \text{ falls } x = a \end{cases}$$

Beispiel:

$$f :]1,2[\to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

Folge $\underline{a_n = 1 + \frac{1}{n}}$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1+\frac{1}{n}-1} = \frac{\left(\frac{n+1}{1}\right)^2 - 1}{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1\right)n = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}\right)n =$$

$$= \frac{\left(n^2+2n+1-n^2\right)n}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \quad \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = \underline{\underline{2}}$$

$$c = 2 \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ falls } x > 1 \\ 2 \text{ falls } x = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \text{stetig.}$$

Bemerkung:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \underline{x+1}$$

Analog spricht man von stetigen Fortsetzungen von Funktionen auf den rechten Randpunkt bzw. auf den fehlenden Punkt a im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} - \{a\}$.

Beispiel:

$f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ ist für $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ definiert und lässt sich auf $x = 1$ stetig fortsetzen.

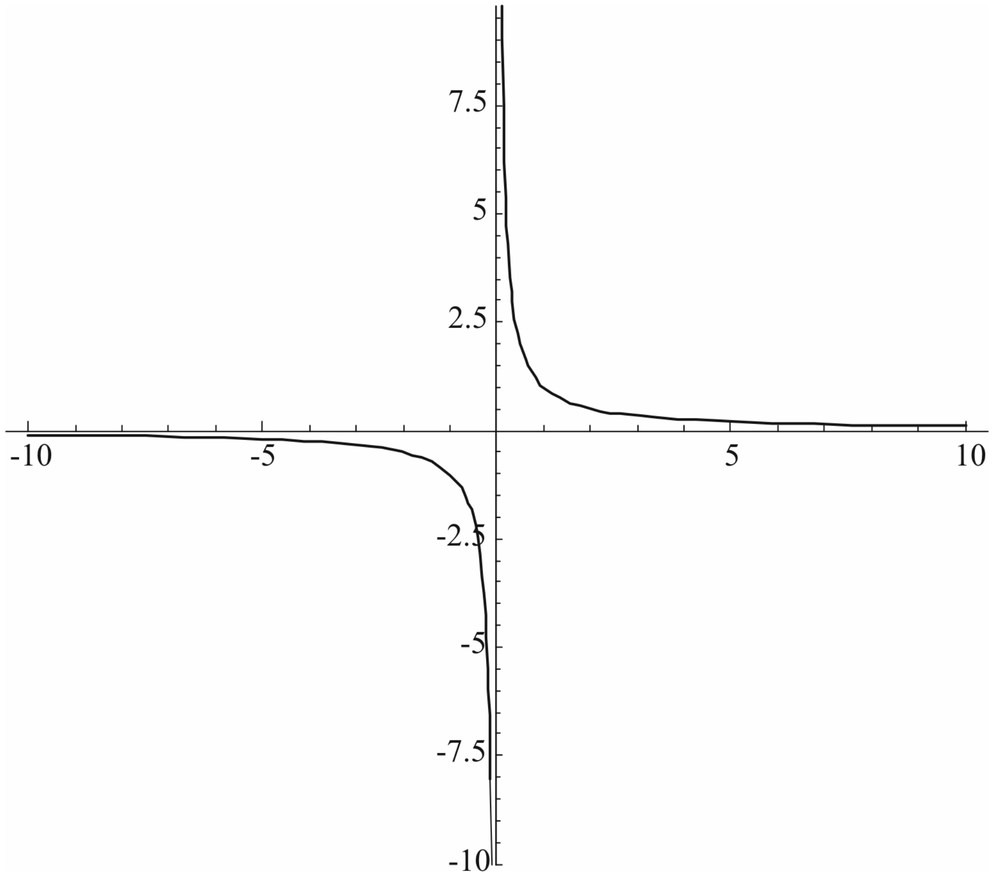
Def.: Wenn $f: D_2 \to \mathbb{R}$ stetig und $\bar{f}: D_1 \to \mathbb{R}$ so dass $D_1 \subset D_2$ und f die Einschränkung von $\bar{f}$ auf D_1 ist, und $\bar{f}$ stetig, so heißt $\bar{f}$ eine stetige Fortsetzung von f auf D_2.

Satz: Falls $D_1 = \mathbb{R} - \{a\}$, $D_2 = \mathbb{R}$, dann gibt es höchstens eine stetige Fortsetzung.

Beispiel:

Stetige Funktion, die sich nicht fortsetzen lässt:

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$



Zusammenstückeln von stetigen Funktionen aus Funktionen die auf Intervallen definiert sind

Es seien $a = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b$ Zahlen, die das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle unterteilen. $[a, b] = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n]$.

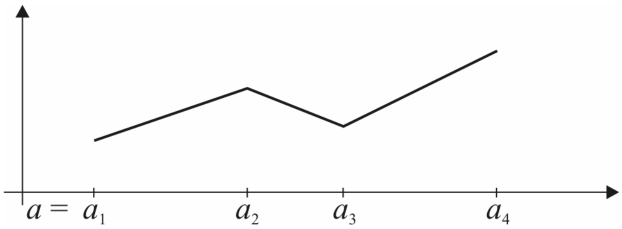
Weiters seien $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ stetig ($i = 1, \ldots, n-1$).

Außerdem gelte $f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1})$ (→ Randpunkte stimmen überein)

Dann ist die Splinefunktion f durch Zusammenstückeln der f_i definiert wie folgt:

$f(x) = f_i(x)$, falls $x \in [a_i, a_{i+1}]$.

Die Funktion ist stetig.

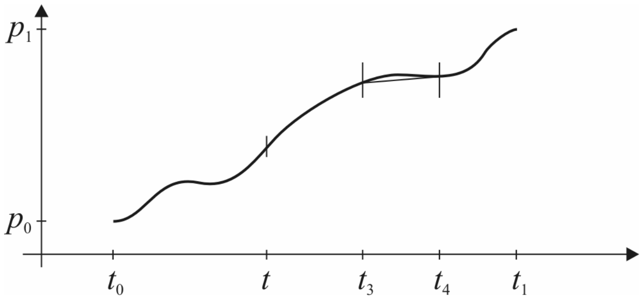


$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \in [0,\infty[\\ -x \text{ für } x \in]-\infty,0] \end{cases}$$

5. Differentialrechnung

Es sei *f* eine Zeit-Weg-Funktion.

A bewegt sich von Punkt p_0 nach p_1. Zum Zeitpunkt *f* befindet sich *A* im Punkt *f*(*t*).
$f(t_0) = p_0, \quad f(t_1) = p_1$.



Wie groß ist die Geschwindigkeit von *A* zum Zeitpunkt *t*?

Durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen Zeitpunkt t_3 und t_4?

$$\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}} = \frac{f(t_4) - f(t_3)}{t_4 - t_3}$$

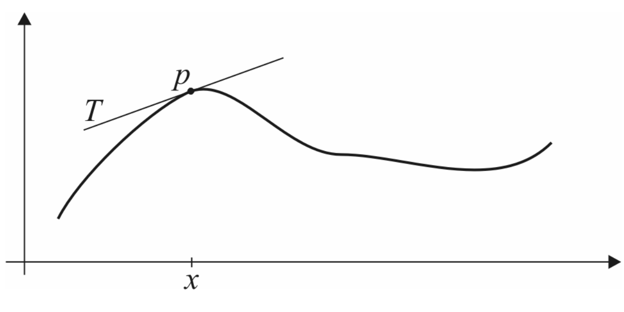
Was ist aber die augenblickliche Geschwindigkeit?

Idee: Berechne die augenblickliche Geschwindigkeit als Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)}{\left(t + \frac{1}{n}\right) - t}$$

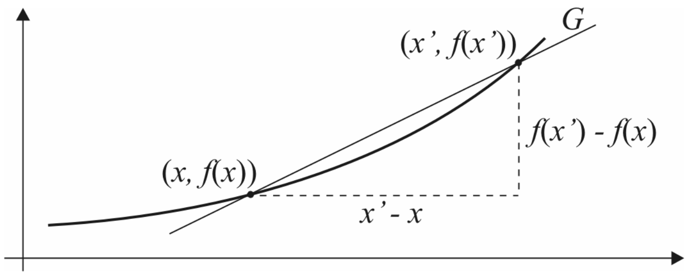
Geometrischer Zugang:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
$x \in \mathbb{R}$
T … Tangente an Graph im Punkt p.



$p = (x, f(x))$

Grenzwert-Konstruktion:



Steigung von $G = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$

Wenn x' in einer Folge gegen x konvergiert, dann konvergiert die so konstruierte Gerade G gegen die Tangente T.

Def.: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. $x \in \mathbb{R}$.
Wenn die Funktion $F_x : \mathbb{R} - \{x\} \to \mathbb{R}; \quad y \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, insbesondere auf $x = y$, dann heißt f im Punkt differenzierbar und der Wert an der Stelle x, $F_x(y) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ heißt Ableitung von f bei x.

Gebräuchliche Notationen:

- Ableitung von f bei x: $\dfrac{df}{dx}$.
- Wenn f bei jedem Punkt x differenzierbar ist dann bezeichnet man die Funktion $x \mapsto$ Ableitung von f bei x als f'.

Beispiel 1:

$f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y - x} =$$

$$= \lim_{y \to x} (y^{n-1} + yx^{n-2} + \ldots + x^{n-1})$$

$$F_x(y) := y^{n-1} + \ldots + x^{n-1}$$

$$f'(x) = F_x(x) = x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = \underline{nx^{n-1}}$$

Beispiel 2:

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^x$

Folge die gegen x konvergiert: $(y_n)_n = x + \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{y \to x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{e^{x + \frac{1}{n}} - e^x}{x + \frac{1}{n} - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^x e^{\frac{1}{n}} - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} e^x \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = e^x \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\text{von } x \text{ nicht abhängig}}$$

Die numerische Berechnung zeigt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1$$

→ $\exp':\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad x\mapsto e^x$.

Beispiel 3:

$\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \ln x=\log_e(x);\quad x\in\mathbb{R}^+$

Berechne den Grenzwert: $\lim\limits_{y\to x}\frac{\ln(y)-\ln(x)}{y-x}$.

Folge, die gegen x konvergiert: $y_n = \cancel{x+\frac{1}{n}}$. In diesem Fall ist eine Folge mit Produkt besser: $y_n = x(1+\frac{1}{n}) = x+\frac{x}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-\ln x}{x+\frac{x}{n}-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln x}{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \underline{\frac{1}{x}}$$

→ $\ln':\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\frac{1}{x}$.

Rechenregeln für Ableitung

- Wenn $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)+g(x)$ (Summenfunktion) differenzierbar, und es gilt $h'(x)=f'(x)+g'(x)$.
- f differenzierbar, $\lambda\in\mathbb{R}$. $h(x)=\lambda f(x)$ differenzierbar, $h'(x)=\lambda f'(x)$.

→ Differenzieren ist „linear".

Beispiel:

$f(x)=7x^3+14x-2x+5$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(x^3)'=3x^2, (x^2)'=2x, (x)'=1x^0=1, (5)'=0$

$f'(x)=21x^2+28x-2$ (→ Summe der Teilfunktionen $(7x^3)'=21x^2, (14x^2)'=28x, \ldots$)

Produktregel:

$h(x)=f(x)\cdot g(x)$

$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Beweis:

f differenzierbar → $f(y)-f(x)=(y-x)F_x(y)$

g differenzierbar → $g(y)-g(x)=(y-x)G_x(y)$

$f'(x)=F_x(x)$

$g'(x)=G_x(x)$

$$h(y)-H(x) \quad = \quad f(y)g(y)-f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad \big(f(x)+(y-x)F_x(x)\big)\big(g(x)+(y-x)G_x(y)\big)-f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad f(x)g(x)+(y-x)F_x(y)g(x)+(y-x)G_x(y)f(x)+(y-x)^2F_x(y)G_x(y)-f(x)g(x) \quad =$$

$$= \quad y-x\underbrace{\big(F_x(y)g(x)+G_x(y)f(x)+(y-x)F_x(y)G_x(y)\big)}_{H_x(y)} \quad = \quad (y-x)H_x(y)$$

$$h'(x)=H_x(x)=F_x(x)g(x)+G_x(x)f(x)+(x-x)F_x(x)G_x(x) \quad =$$

$$\boxed{= \quad f'(x)g(x)+g'(x)f(x)}$$

Quotientenregel:

Es seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\neq 0$.

Dann ist $h(x)\,\frac{f(x)}{g(x)}$ bei x differenzierbar, und $\boxed{h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}}$

Kettenregel:

Es seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann ist $h=f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f\big(g(x)\big)$ wieder differenzierbar und

$\boxed{h'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)}$.

Beispiel:

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\quad x\mapsto x^\alpha \qquad \alpha\in\mathbb{R}$

Für reelle α ist $(\ )^\alpha$ nur für positive Zahlen definiert. ($(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$ ist nicht definiert.)

$\ln x^\alpha=\alpha\ln x$ / exp auf beiden Seiten

$x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{(\alpha\ln x)}$

$g(x)=\alpha\ln x$

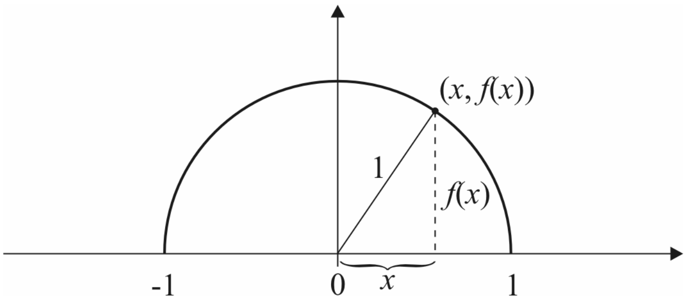
$\exp(x)=e^x$ daher $x^\alpha=\exp\circ g(x)=\exp\big(g(x)\big)$

$$f'(x) \quad = \quad \exp'\big(g(x)\big)g'(x) \quad = \quad \exp\big(g(x)\big)\alpha\frac{1}{x} \quad = \quad x^\alpha\alpha\frac{1}{x} \quad =$$

$$= \quad x^\alpha\alpha x^{-1} \quad = \quad \alpha x^\alpha x^{-1} \quad = \quad \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}}_{\text{gleiches Ergebnis für allgemeine }\alpha.}$$

Beispiele aus den eingangs erwähnten Anschauungen für Ableitung

- Tangente an Kreis



Halbkreis ist Graph der Funktion $f:[-1,1]\to\mathbb{R};\quad x\mapsto\sqrt{1-x^2}$.
(Pythagoras $x^2+\left(f(x)\right)^2=1$, daher $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.)

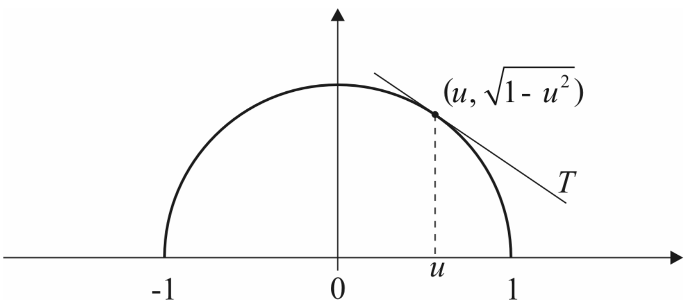
Kettenregel: $f(x)=g\circ h=g\left(h(x)\right)$ mit $g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$h(x)=1-x^2$

$$g'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=-2x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h(x)}}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$



Steigung: $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ → $-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

Gerade T: $y=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}x+d$.

d ist so zu wählen, dass $\left(u,\sqrt{1-u^2}\right)$ auf T liegt:

$$\sqrt{1-u^2}=-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}u+d$$

$$d=\sqrt{1-u^2}--\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}u$$

Gleichung der Kreistangente an $\left(u, \sqrt{1-u^2}\right)$:

$$\boxed{y = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}x + \sqrt{1-u^2} - \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}u}$$

- Weg-Zeit-Funktion für ein Teilchen im freien Fall
  Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird Körper A losgelassen und bewegt sich im freien Fall nach unten. $f(t)$ ist die zurückgelegte Entfernung zur Zeit t.

  Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t:

  Geschwindigkeitsdifferenz v(t) $\frac{v(t)-v(0)}{t-0} = const.$

  Erdbeschleunigung $a = 9,81 m/s^2$

  $\frac{v(t)-0}{t} = a, \quad v(t) = at$

  Suchen:

  Funktion f mit $f'(t) = at$ ("Stammfunktion").

  $\frac{dt^n}{dt} = n \cdot f^{n-1}$ n = 2

  $\frac{dt^2}{dt} = 2t$

  $\boxed{f(t) = \frac{a}{2}t^2}$ erfüllt das. Die Funktion beschreibt tatsächlich die Weg-Zeit-Abhängigkeit im freien Fall.

Anwendungen der Differenzialrechnung

a) Iteration von Funktionen

$x_{n+1} = f(x_n), \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, Ableitung wieder stetig.
Grenzwert der Folge $(x_n)_n$ muss Fixwert von *f* sein, d.h. $a \in \mathbb{R}$ kann nur dann Grenzwert sein, wenn $f(a) = a$.
Beweis:

Angenommen $\lim_{x\to\infty} x_n = a$ dann ist wegen der Stetigkeit von *f*

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$

Wann ist umgekehrt ein Fixwert *f* ein Grenzwert?

Satz:

Wenn $|f'(a)|<1$ ist, dann gibt es eine Umgebung $(a-h, a+h)$ von *a*, sodass jede Folge $x_0 \in U, \quad x_{n+1}=f(x_n)$ gegen *a* konvergiert. Die Konvergenz ist linear. Einen Fixpunkt *a* mit $|f'(a)|<1$ nennt man „attraktiv".

Beispiel:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; \quad x\mapsto \cos x$

Die Folge konvergiert für einen beliebigen Startwert linear gegen $a=0,73...$ Dieses a ist attraktiver Fixpunkt und muss $|f'(a)|<1$ erfüllen.

$f'(x)=-\sin(x)$

$|-\sin(0,73)|=0,8<1 \qquad \Rightarrow$ attraktiver Fixpunkt.

Wenn $|f'(x)|>1$, dann konvergiert keine Folge (außer konstante Folgen) der Art $x_{n+1}=f(x_n)$ gegen *a*. Auch wenn der Startwert noch so nahe bei *a* liegt, strebt die Folge von *a* weg. (abstoßender Fixpunkt).

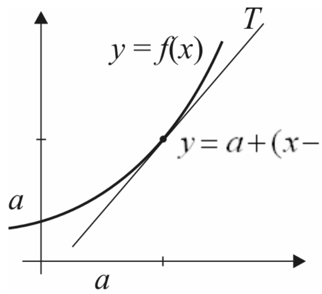
Idee:

In der Nähe des Fixpunktes verhält sich die Funktion wie die Tangente

$x_{n+1}=f(x_n)$

$x_{n+1}=(x_n-a)\cdot f'(a)+\underbrace{f(a)}_{=a}$

$x\mapsto (x-a)f'(a)+f(a)$ ist die Tangente von *f* durch (*a*,*a*)



Frage:

Wie groß kann die Umgebung sein in der die Folge zum Grenzwert konvergiert?

Satz:

Es sei $f:[a,b]\to[a,b]$ stetig differenzierbar. (a bzw. b können $\infty/-\infty$ sein)

→ Es sei $|f'(x)|<q<1$ für alle $x\in[a,b]$.

Dann gibt es genau einen Fixpunkt $a=f(a)$ (attraktiv). Jede Folge $x_0\in[a,b], \quad x_{n+1}=f(x_n)$ konvergiert gegen a.

$|f'(x)|<1$ für alle x reicht nicht aus! $|f'(x)|<q<1$ notwendig!

Beispiel:

$$[1,\infty[\to[1,\infty[;\;\; x\mapsto x+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=1+(-1)x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$$

$0\le 1-\frac{1}{x^2}<1$, daher ist $\left|f'(x)\right|<1$ für alle $x\in[1,\infty[$.

Aber f hat keinen Fixpunkt:

$$x=x+\frac{1}{x}$$

$$0=\frac{1}{x}$$

$$x\cdot 0=1$$

$0=1 \quad \Rightarrow$ für kein x erfüllt.

Beispiel:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto e^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}(-1)=-e^{-x}$

$\left|f'(x)\right|<1$ gilt nur für x<0! Um den Satz anzuwenden muss zunächst f eingeschränkt werden auf $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$. In diesem Bereich gilt $\left|f'(x)\right|<1$.

Verallgemeinerung:

Betrachten $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f$ stetig differenzierbar.

$f:(x_1,x_2)\mapsto\left(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)\right)$

Def.: *f* heißt stetig differenzierbar (C^1), wenn die Funktionen

$f_1^{x_1}:x_2\mapsto f_1(x_1,x_2)$

$f_2^{x_1}:x_2\mapsto f_2(x_1,x_2)$

$f_1^{x_2}:x_1\mapsto f_1(x_1,x_2)$

$f_2^{x_2}:x_1\mapsto f_2(x_1,x_2)$

alle stetig differenzierbar sind.

Beispiel:

$$(x_1,x_2)\mapsto\left(x_1^{\,2}-x_2^{\,2},\,2x_1x_2+\frac{1}{2}\right)$$

$f_1^{x_1}:x_2\mapsto x_1^{\,2}-x_2^{\,2}$

→ etwa $f_1^5:x_2\mapsto 25-x_2^{\,2}$ ist C^1.

(Genauso sind in diesem Fall $f_1^{x_1},\dots,f_2^{x_2}$ alle C^1. Damit ist $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ C^1.)

Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x_1,x_2)\mapsto\left(f_1(x_1,x_2),\,f_2(x_1,x_2)\right)$ stetig differenzierbar.

Die Ableitung von f an der Stelle (x_1, x_2) ist definiert als eine Matrix von vier Zahlen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2},\, 2x_1x_2 + \frac{1}{2} \right)$$

Ableitung (x_1, x_2):

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

Wenn (y_1, y_2) in der Nähe von (x_1, x_2) ist, dann lässt sich die Funktion durch die Ableitung approximativ beschreiben:

$$(y_1, y_2) \overset{\sim}{\mapsto} \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)(y_2 - x_2), \\ f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)(y_2 - x_2) \end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2) = (1, 2)$:

Ableitung: $\qquad f(1,2) = (-3,\ 4{,}5)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(y_1, y_2) \mapsto \left(-3 + 2 \cdot (y_1 - 1) + (-4) \cdot (y_2 - 2),\ 4{,}5 + 4 \cdot (y_1 - 1) + 2 \cdot (y_2 - 2) \right)$$

Verhalten von Iterationen in der Nähe eines Fixpunktes (a_1, a_2):

$$f_1(a_1, a_2) = a_1, \quad f_2(a_1, a_2) = a_2$$

$$\left(f(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \right)$$

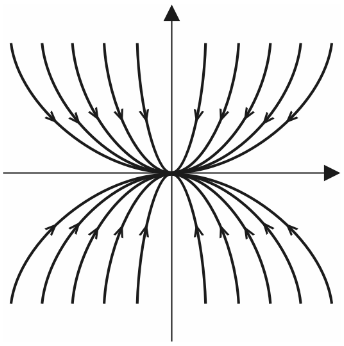
$$(x_1 - a_1 + a_1,\, x_2 - a_2 + a_2) \overset{\sim}{\mapsto} \left(a_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2 - a_2),\, a_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2 - a_2) \right)$$

$$(a_1 + y_1,\, a_2 + y_2) \mapsto \left(a_1 + \underline{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} y_2},\, a_2 + \underline{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} y_2} \right)$$

→ in "lineare Algebra" werden Funktionen dieser Bauart untersucht.

Verschiedene Typen möglich:

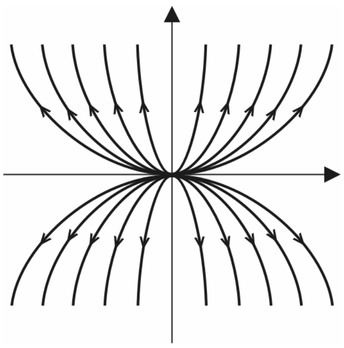
1.) ***nodale Kontraktion***



$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

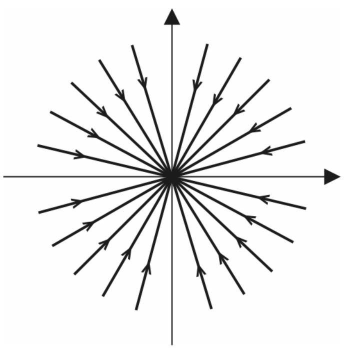
2.) ***nodale Expansion***



$$(x_1, x_2) \mapsto (2x_1, 3x_2)$$

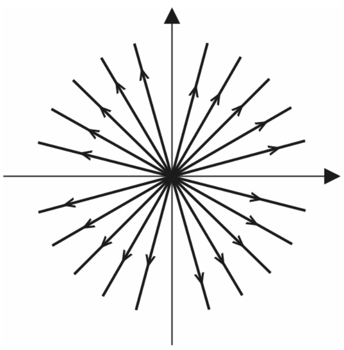
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.) ***kontraktive Ähnlichkeit***



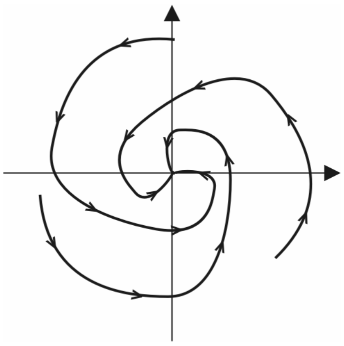
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.) ***expansive Ähnlichkeit***



$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

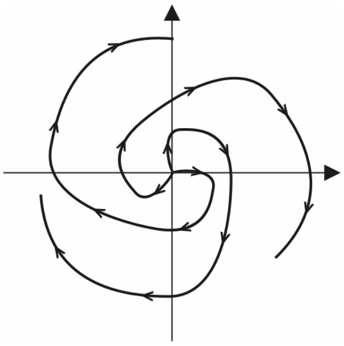
5.) ***spiralige Kontraktion***



$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

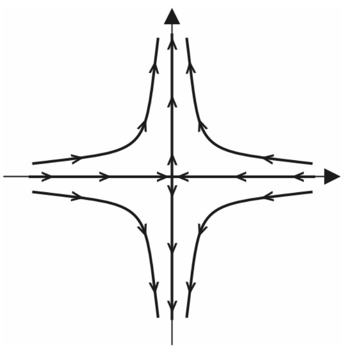
6.) ***spiralige Expansion***



$$(x_1, x_2) \mapsto \left(x_1 - x_2, x_1 + x_2 \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

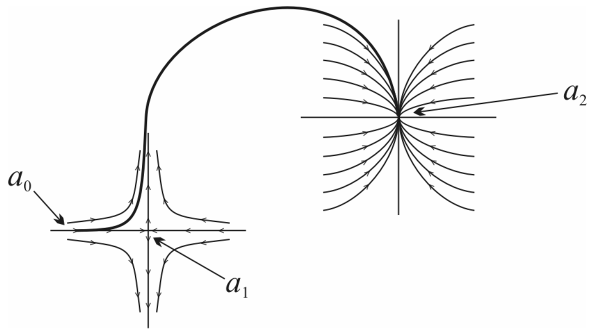
7.) ***hyperbolische Transformation***



$$(x_1, x_2) \mapsto \left(2x_1, \frac{x_2}{2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Angenommen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hat zwei Fixpunkte.
Der erste ist vom Typ "nodale Kontraktion", der zweite ist vom Typ "hyperbolische Transformation".

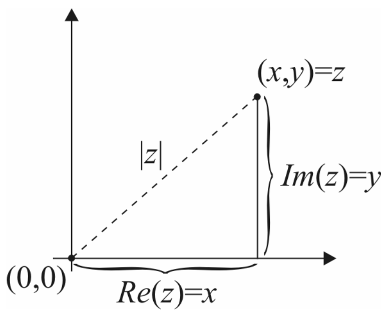


Bei exakter Berechnung würde die Folge mit Startwert a_0 nach a_1 konvergieren. Bei numerischer Berechnung treten jedoch kleine Fehler auf, die expansive Richtung setzt sich durch und schießt die Folge weg, sie könnte dann z.B. stabil gegen a_2 konvergieren.

Einschub:

6. Komplexe Funktionen

Def.: Eine komplexe Zahl ist ein Paar (x, y) von reellen Zahlen.
$(0,1)$ ist definiert als "imaginäre Einheit";
$(x,0)$ heißt "reell" und wird identifiziert mit $x \in \mathbb{R}$.
Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl.
Dann heißt x "Realteil" von z, $\mathrm{Re}(z) = x$
und y "Imaginärteil" von z, $\mathrm{Im}(z) = y$
und $\sqrt{x^2 + y^2}$ "Betrag" von z, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Schreibweise von komplexen Zahlen:

$$(x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy$$

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\
(x_1, y_1) - (x_2, y_2) &:= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} &:= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{y_1^2 y_2^2}, -\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1^2 y_2^2} \right)
\end{aligned}$$

Der Bereich der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die übrigen Rechenregeln gelten.

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\quad (x, y) \mapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big)$ heißt stetig differenzierbar als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Die Funktion heißt komplex differenzierbar (holomorph), wenn sie stetig differenzierbar ist, und die Ableitung die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen. ("Couchy-Riemann´schen Differenzialgleichungen")

$$\cdot(-1)\quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Wenn $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad (x,y)\mapsto\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ komplex differenzierbar ist, dann heißt die komplexe Zahl $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y},-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ Ableitung von *f* an der Stelle (*x*,*y*).

Beispiel

$(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$

reelle Ableitung:

$$(-1)\quad \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

Couchy-Riemann erfüllt, *f* ist komplex differenzierbar.

Die komplexe Ableitung ist (2*x*,2*y*).

Bemerkung:

$(x^2-y^2,2xy)=(x,y)(x,y)$

$z\mapsto z\cdot z=z^2$

Die Ableitung von z^2 ist $2z$.

Weitere komplex differenzierbare Funktionen

- $f:z\mapsto a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n$ wobei $a_0\,...\,a_n$ fixe komplexe Zahlen. *f* ist komplex differenzierbar und $f'(z)=a_1+2a_2z+...+n\cdot a_n\cdot z^{n-1}$.
- Die Addition / Multiplikation / Komposition komplex differenzierbarer Funktionen ist wieder komplex differenzierbar und es gelten die üblichen Regeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel).

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto z^2$$

$$\begin{aligned} x+iy \mapsto (x+iy)^2 &= x^2+2xiy+(iy)^2 \\ &= x^2+i\cdot 2xy+i^2y^2 \\ &= x^2+2xy-y^2=(x^2-y^2)+i2xy \end{aligned}$$

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad x+iy\mapsto e^x\cos y+i\,e^x\sin y$$

Ist exp komplex differenzierbar?

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(e^x\cos y\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(e^x\cos y\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\left(e^x\sin y\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(e^x\sin y\right)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x\cos y & e^x\left(-\sin y\right) \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{bmatrix}$$ → Couchy-Riemann erfüllt.

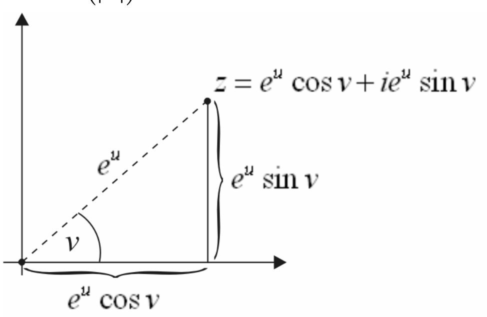
$$\exp'(x+iy)=e^x\cos y+i\,e^x\sin y=\underline{\exp(x+iy)}$$

$$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2) \qquad \left(e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}\right)$$

Graphische Deutung der komplexen Zahlen

Jede komplexe Zahl $z\neq 0$ lässt sich schreiben als e^{u+iv}.

$u=\ln\left(|z|\right)$



$v = \measuredangle$ x-Achse, Gerade $\overrightarrow{Oz}$

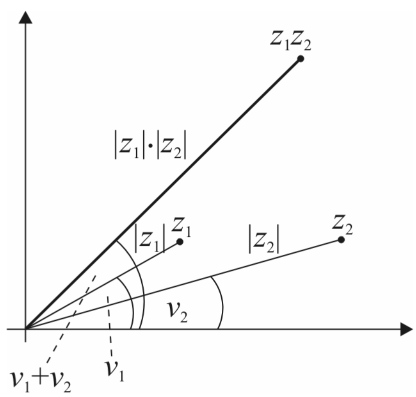
$z_1=e^{u_1+iv_1}\qquad u_1=\ln|z_1|,\quad v_1=\measuredangle$ x-Achse, $\overrightarrow{Oz_1}$

$z_2=e^{u_2+iv_2}\qquad u_2=\ln|z_2|,\quad v_2=\measuredangle$ x-Achse, $\overrightarrow{Oz_2}$

$$z_3=z_1\cdot z_2=e^{u_1+iv_1}e^{u_2+iu_2}=e^{\overbrace{u_1+u_2}^{u_3}+i\overbrace{(u_1+u_2)}^{v_3}}=e^{u_3+iv_3}$$

$$|z_3|=|z_1,z_2|=e^{u_3}=e^{u_1+u_2}=e^{u_1}e^{u_2}=|z_1|\cdot|z_2|$$

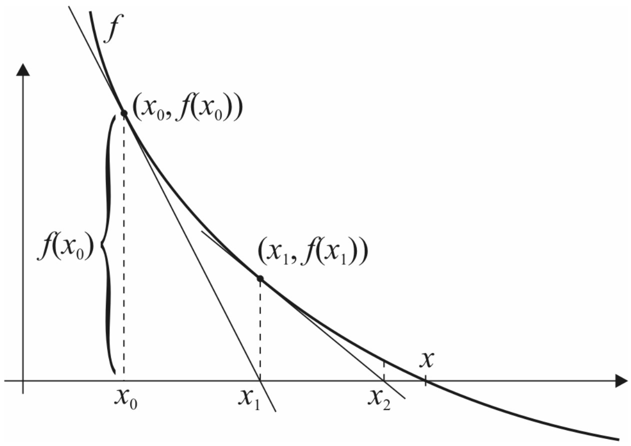
$\measuredangle$ x-Achse, $\overrightarrow{Oz_3}=\measuredangle$ x-Achse, $\overrightarrow{Oz_1}+\measuredangle$ x-Achse, $\overrightarrow{Oz_2}$



$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2 + a$: Abhängig vom Startwert konvergiert die Folge gegen attraktive Fixpunkte oder geht gegen ∞ oder sie hüpft in einem endlichen Bereich chaotisch hin und her.

Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Gesucht ist ein $x \in [a,b]$, sodass $f(x) = 0$.
Idee: graphisch:



Ist x_0 eine Nullstelle?
nein → Tangente durch x_0 → schneiden mit x-Achse.

Steigung der Tangente: $\dfrac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$

Berechnung von x_1 aus dieser Gleichung:

$$-f(x_0) = (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$

$$\underline{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

→ mit x_1 das Verfahren wiederholen.

→ rekursiv definierte Folge; x_0 Startwert ist beliebig wählbar.

$$\boxed{x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

In vielen Fällen konvergiert diese Folge gegen eine Nullstelle. In der Regel ist die Konvergenz quadratisch.

Zweite Herleitung der rekursiven Formel:

Die Tangente an x_0 hat die Gleichung $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Statt $f(x) = 0$ löse $g(x) = 0$, wobei $y = g(x)$.
Die Gleichung der Tangente ist $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$.

Auflösen nach x:
$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$

$$\underline{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Beispiel:

Berechnung von $\sqrt{a}$.
Nullstelle der Funktion $x \mapsto x^2 - a$
x_0 beliebiger Startwert.

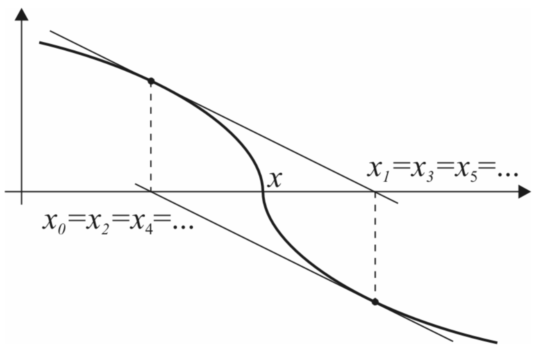
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\ 2} - a}{2x_n} = \frac{2x_n^{\ 2}}{2x_n} + \frac{-x_n^{\ 2} + a}{2x_n} = \frac{2x_n^{\ 2} - x_n^{\ 2} + a}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n^{\ 2} + a}{2x_n} = \underline{\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}}$$

konvergiert quadratisch gegen $\sqrt{a}$ wenn der Startwert $x_0 > 0$ ist.

Beispiel:

Divergenz des Newton-Verfahrens



Satz:

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1$ für alle $x \in [a,b]$.

2) $a \le x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \le b$ für alle x. (d.h. Newton führt nicht aus $[a,b]$ heraus)

Dann gibt es genau eine Nullstelle in $[a,b]$, und das Newton-Verfahren konvergiert gegen diese.

Beweis:

Ein früherer Satz besagt, dass eine rekursive Folge $x_{n+1} = g(x_n)$ immer gegen den Fixpunkt in $[a,b]$ konvergiert, wenn $|g'(x)| < 1$ in $[a,b]$ ist.

Setze $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{-f(x)\cdot f''(x) + f'(x)\cdot f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \\ &= 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - \frac{f'(x)^2}{f'(x)^2} \\ &= 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} - 1 \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \end{aligned}$$

Daher ist $|g'(x)| < 1$ äquivalent zu $\left|\dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1$.

Dass heißt, wenn die Bedingungen erfüllt sind, konvergiert das Newton-Verfahren gegen den einzigen Fixpunkt von *g*.

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \qquad (x \text{ ist Fixpunkt von } g)$$

$$-f(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{differenzierbare Funktionen}$$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \left(f(x,y), g(x,y)\right)$

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion *F*.

Einfacher Fall: *f*,*g* sind lineare Funktionen.

$$f(x,y) = ax + by + e$$
$$g(x,y) = cx + dy + f$$

I: $ax + by + e = 0$
II: $cx + dy + f = 0$

III = $d \cdot$ I: $adx + bdy + de = 0$
IV = $b \cdot$ II: $bcx + bdy + bf = 0$

$$\text{III} - \text{IV}: (ad - bc)x + 0 + de - bf = 0$$
$$(ad - bc)x = -de + bf$$
$$\underline{\underline{x = \frac{-de + bf}{ad - bc}}}$$

Voraussetzung: $ad - bc \neq 0$!

V = $c \cdot$ I: $acx + bcy + ec = 0$
VI = $a \cdot$ II: $acx + adx + af = 0$

$$\text{VI} - \text{V}: 0 + (ad - bc)y + af - ec = 0$$
$$(ad - bc)y = -af + ec$$
$$\underline{\underline{y = \frac{-af + ec}{ad - bc}}}$$

Seien jetzt *f*,*g* **beliebige differenzierbare Funktionen**. (x_0, y_0) ist der Startwert für die Newton-Iteration. In der Nähe von (x_0, y_0) lässt sich die Funktion $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear approximieren wie folgt:

$$f(x,y) \sim f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$
$$g(x,y) \sim \underbrace{g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)}_{\text{lineare Funktionen in } x \text{ und } y}$$

$$x - x_0 = \bar{x}$$
$$y - y_0 = \bar{y}$$

lineares Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{(x_0,y_0)}^{a}\cdot\bar{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{(x_0,y_0)}^{b}\cdot\bar{y} + f\overbrace{(x_0,y_0)}^{e} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}\overbrace{(x_0,y_0)}^{c}\cdot\bar{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\overbrace{(x_0,y_0)}^{d}\cdot\bar{y} + g\overbrace{(x_0,y_0)}^{f} = 0$$

Lösung des Systems gemäß obigen Lösungen:

$$F_1(x_0,y_0):\quad \bar{x}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

$$F_2(x_0,y_0):\quad \bar{y}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0)+\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot f(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist daher:

$$x_1=x_0+F_1(x_0,y_0)$$
$$y_1=y_0+F_2(x_0,y_0)$$

Dies wird als Iteration verwendet:

$$x_{n+1}=x_n+F_1(x_n,y_n)$$
$$y_{n+1}=y_n+F_2(x_n,y_n)$$

Beispiel:

$$f(x,y)=x^3-3xy^2-1$$
$$g(x,y)=3x^2y-y^3$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x^2-3y^2 & -6xy\\ 6xy & 3x^2-3y^2\end{bmatrix}$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{-\left(3x_n^{\ 2}-3y_n^{\ 2}\right)\cdot\left(x_n^{\ 3}-3x_ny_n^{\ 2}-1\right)+\left(6x_ny_n\right)\cdot\left(3x_n^{\ 2}y_n-y_n^{\ 3}\right)}{\left(3x_n^{\ 2}-3y_n^{\ 2}\right)^2+36x_n^{\ 2}y_n^{\ 2}}$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{-\left(3x_n^{\ 2}-3y_n^{\ 2}\right)\cdot\left(3x_n^{\ 2}y_n-y_n^{\ 3}\right)+\left(6x_ny_n\right)\cdot\left(x_n^{\ 3}-3x_ny_n^{\ 2}-1\right)}{\left(3x_n^{\ 2}-3y_n^{\ 2}\right)^2+36x_n^{\ 2}y_n^{\ 2}}$$

Für den Starwert $(x_0,y_0)=(1,1)$ konvergiert diese Folge gegen $(-0.5\ ,\ 0.873...)$ (?)

Komplexes Newton-Verfahren

Gegeben: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto f(z)$ komplex differenzierbar.
Gesucht: Nullstelle von *f*.

Iterationsformel ist wie im reellen Fall: $z_{n+1}=z_n-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$.

Wenn der Startwert z_0 in der Nähe einer Nullstelle liegt, dann konvergiert die Folge gegen diese Nullstelle. (mit quadratischer Konvergenzrate).

Beispiel:

Gesucht ist die Nullstelle von $f(z)=z^3-1$

$z \quad = x+iy$

$z^3-1 \quad =(x+iy)^3-1=$

======

Binomischer Lehrsatz:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

======

$$
\begin{aligned}
&=x^3+3x^2iy+3x(iy)^2+(iy)^3-1\\
&=x^3+i3x^2y+3xi^2y^2+i^3y^3-1\\
&=x^3+i3x^2y+3xy^2+iy^3-1\\
&=(x^3-3xy^2-1)+i(3x^2y-y^3)
\end{aligned}
$$

Die komplexe Funktion $f(z)=z^3-1$ entspricht der Funktion
$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(x^3-3xy^2-1,3x^2y-y^3)$.

$f'(z)=3z^2$

$$z_{n+1}=z_n-\frac{z_n^{\ 3}-1}{3z_n^{\ 2}}$$

Nachtrag zu den Regeln des Differenzierens

→ Kettenregel in zwei Variablen

Es sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar

$g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$h = f \circ (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f\left(g_1(x), g_2(x)\right)$ wieder differenzierbar und es gilt die Formel $h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(g_1(x), g_2(x)\right) \cdot g_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(g_1(x), g_2(x)\right) \cdot g_2'(x)$.

$x_1 = g_1(x) \qquad x_2 = g_2(x)$

→ Herleitung der Produktregel

$\left(g_1 \cdot g_2\right)' = g_1 \cdot g_2' + g_2 \cdot g_1'$:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$

$h = f\left(g_1(x), g_2(x)\right) = g_1(x) \cdot g_2(x)$

$$h'(x) = \underbrace{g_2(x)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(g_1, g_2)} \cdot g_1'(x) + \underbrace{g_1(x)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(g_1, g_2)} \cdot g_2'(x)$$

Wir wissen bereits:

$f : x \mapsto x^a, \quad f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ (Potenzfunktion)

$g : x \mapsto b^x, \quad g'(x) = \ln b \cdot b^x$ (Exponentialfunktion)

Was ist die Ableitung von x^x?

$g_1(x) = x$

$g_2(x) = x$

$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$

$h(x) = g_1(x)^{g_2(x)} = x^x$

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g_1, g_2) \cdot \underbrace{g_1'}_{1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g_1, g_2) \cdot \underbrace{g_2'}_{1} = \underline{\underline{x \cdot x^{x-1} + \ln x \cdot x^x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \cdot x_1^{x_2 - 1}$$

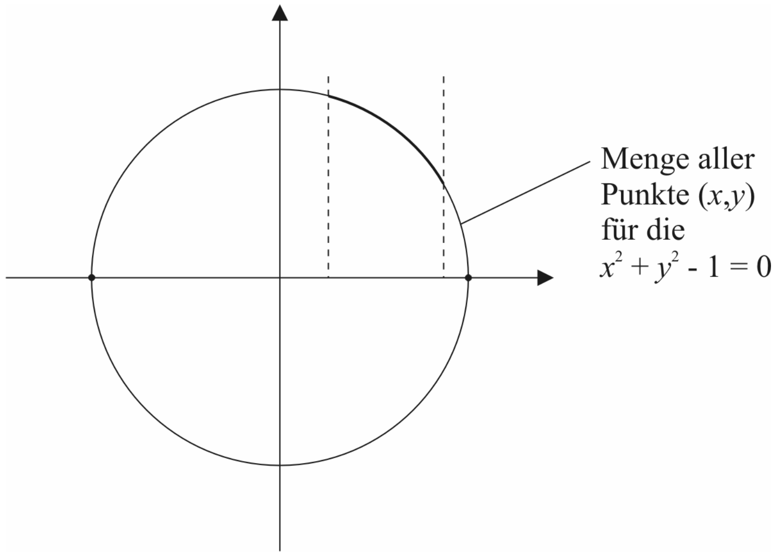
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \ln x_1 \cdot x_1^{x_2}$$

Implizit gegebene Funktionen

$x \mapsto x^2$ → explizite Angebe
$x \mapsto y$ sodass $f(y,x)=0$ → implizite Angabe

Die Nullstellenmenge von $f(x,y)$ ist im Allgemeinen eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel: $f(x,y)=x^2+y^2-1$



Die dick gezeichnete Kurve ist der Graph einer Funktion $x \mapsto g(x)$ sodass gilt: für jedes x ist $g(x)$ ein y, dass $f(x,y)=0$ erfüllt. Mit anderen Worten: $f\left(x,g(x)\right)=0$.
Jeder Definitionsbereich in der Nähe der zwei Punkte ist keine Funktion.

Allgemein gilt: (Satz über implizite Funktionen)

Es sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar.
Es sei (x_0,y_0) ein Punkt mit der Eigenschaft $f(x_0,y_0)=0$.
Zusätzlich gelte: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ (Tangentennullstellenmenge ist nicht senkrecht)
Dann existiert in der Nähe von (x_0,y_0) eine stetig differenzierbare Funktion deren Graph in der Nullstellenmenge enthalten ist:
In geeigneter Umgebung $\left[x_0-\Sigma, x_0+\Sigma\right]$ von x_0 ist $g:\left[x_0-\Sigma, x_0+\Sigma\right]$ stetig differenzierbar und es gilt $f\left(x,g(x)\right)=0$ für alle $x \in \left[x_0-\Sigma, x_0+\Sigma\right]$.
Für die Ableitung gilt die Formel:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,g(x)\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,g(x)\right)}$$

Beweis der Formel der Ableitung:

$h(x)=f\left(x,g(x)\right)=0$ wegen oben.

Differenzieren auf beiden Seiten:

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big) \cdot \underbrace{(x)'}_{1} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)$$

$$\underline{g'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)}}$$

Beispiel:

$f:(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ definiert implizit die Funktion $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Definitionsintervall: $[-1,1]$.

$g'(x)$ kann auch mit der Formel für implizites differenzieren ausgerechnet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)}{\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)} = -\frac{2x}{2g(x)} = \underline{\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

(Vgl. mit Beispiel aus den Ableitungsregeln „Tangente an Kreis“)

7. Optimierung

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$
Gesucht: x_0, sodass $f(x_0)$ maximal ist.

Def:

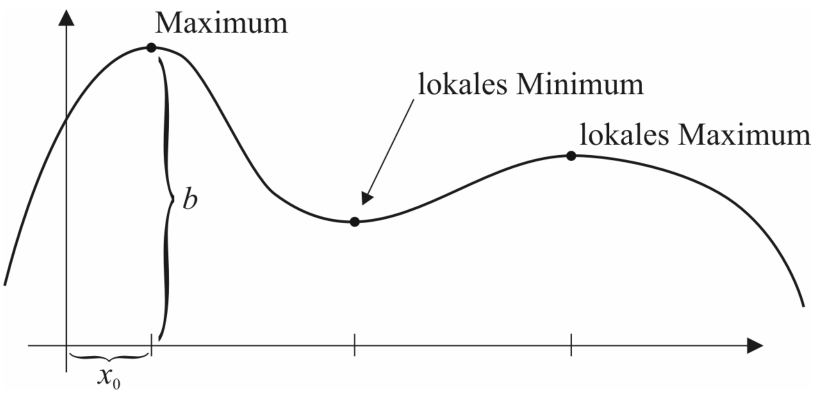
(1) Ein Wert b heißt *Maximum* von f, wenn es ein x_0 gibt mit $f(x_0) = b$, und $f(x) \le b$ für alle x.

(2) Eine Stelle x_0 heißt *Maximumstelle*, wenn $f(x_0) = b$ und b ein Maximum ist.

(3) Ein Wert b heißt *lokales Maximum*, wenn ein x_0 mit $f(x_0) = b$ und eine Umgebung $[x_0 - \Sigma, x_0 + \Sigma]$ von x_0 existiert, sodass $f(x) \le b$ für alle $x \in [x_0 - \Sigma, x_0 + \Sigma]$.

(4) Eine Stelle x_0 heißt *lokale Maximumstelle*, wenn $f(x_0) = b$ und $f(x) \le b$ für eine Umgebung $[x_0 - \Sigma, x_0 + \Sigma]$ gilt.

(5) Analoge Definitionen für Minima.



Minimum existiert nicht.
Falls ein Maximum existiert, ist es eindeutig.
(Zitat: So wie beim Highlander: „Es kann nur einen geben“).
Es kann aber mehrere Maximalstellen geben.

Satz:

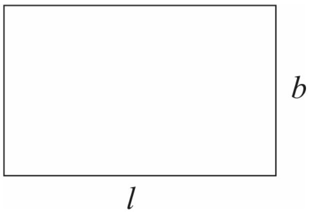
Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und x_0 eine (lokale) Maximal- oder Minimalstelle ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

Wäre $f'(x_0) > 0$, dann wäre f in einer Umgebung von x_0 monoton wachsend und x_0 könnte kein lokales Extremum sein. Wäre $f'(x_0) < 0$, dann wäre f in einer Umgebung von x_0 monoton fallend. → Für lokale Extrema bleibt daher nur $f'(x_0) = 0$.

Beispiel:

Maximiere eine rechteckige Wiese bei gegebenem Umfang



$$2l + 2b = K$$
$$l \cdot b \to \max \qquad x = l$$

$$2x + 2b = K$$
$$2b = K - 2x$$
$$b = \frac{K - 2x}{2}$$

$$f(x) : \left[0, \frac{K}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \cdot \frac{K - 2x}{2} = \frac{Kx - 2x^2}{2} = \frac{K}{2}x - x^2$$

$$f'(x) = \frac{K}{2} - 2x$$

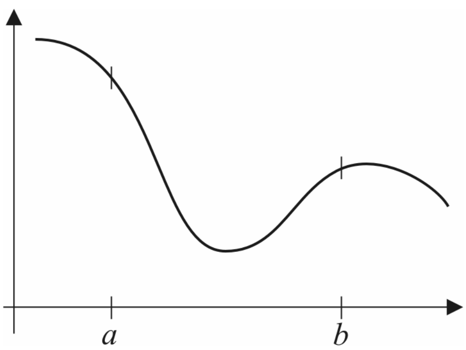
Extremum bei $\frac{K}{2} - 2x = 0 \qquad \to x = \frac{K}{4}$

$l = \frac{K}{4}$ Maximalstelle

$$b = \frac{K}{2} - \frac{K}{4} = \frac{K}{4}$$

Maximum: $l \cdot b = \frac{K^2}{16}$.

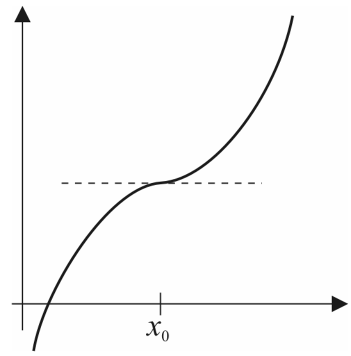
Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $x_0 \in]a,b[$ eine (lokale) Extremstelle ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.



Falls a ein lokales Maximum ist, gilt $f'(a) \leq 0$.
Falls b ein lokales Minimum ist, gilt $f'(b) \geq 0$.

Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für Extremstelle.

Beispiel wo $f'(x_0)=0$, aber bei x_0 keine Extremstelle ist:



$f'(x_0)=0$, aber kein lokales Extremum.

Optimierung in zwei Variablen

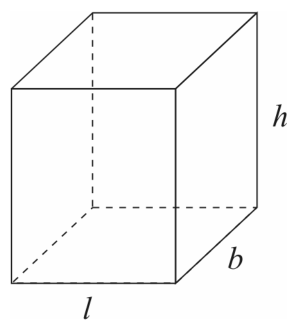
Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.
Wenn (x_0, y_0) im Inneren von *D* ist und lokale Extremstelle ist, dann gilt
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Berechnung des Extremums:

Löse das Gleichungssystem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
(2 Gleichungen in 2 Unbekannten).
Überprüfe ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt.

Beispiel:
Maximiere das Volumen eines Quaders, Oberfläche ist konstant.

$V = l \cdot b \cdot h \to \max$
$O = 2(lb + lb + bh) \qquad x = l, \quad y = b$



Optimierungsproblem mit Nebenbedingung!

$$O = 2xy + 2(xh + yh)$$
$$O = 2xy + 2(x+y)h$$
$$O - 2xy = 2(x+y)h$$
$$h = \frac{O - 2xy}{2(x+y)}$$

$$V = x \cdot y \cdot \frac{O-2xy}{2(x+y)} = \underline{\frac{Oxy - 2x^2y^2}{2(x+y)}}$$

$$\text{I: } \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2(x+y)(Oy-4xy^2)-2(Oxy-2x^2y^2)}{\left(2(x+y)\right)^2}$$

$$\text{II: } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2(x+y)(Ox-4x^2y)-2(Oxy-2x^2y^2)}{\left(2(x+y)\right)^2}$$

I=0; II=0

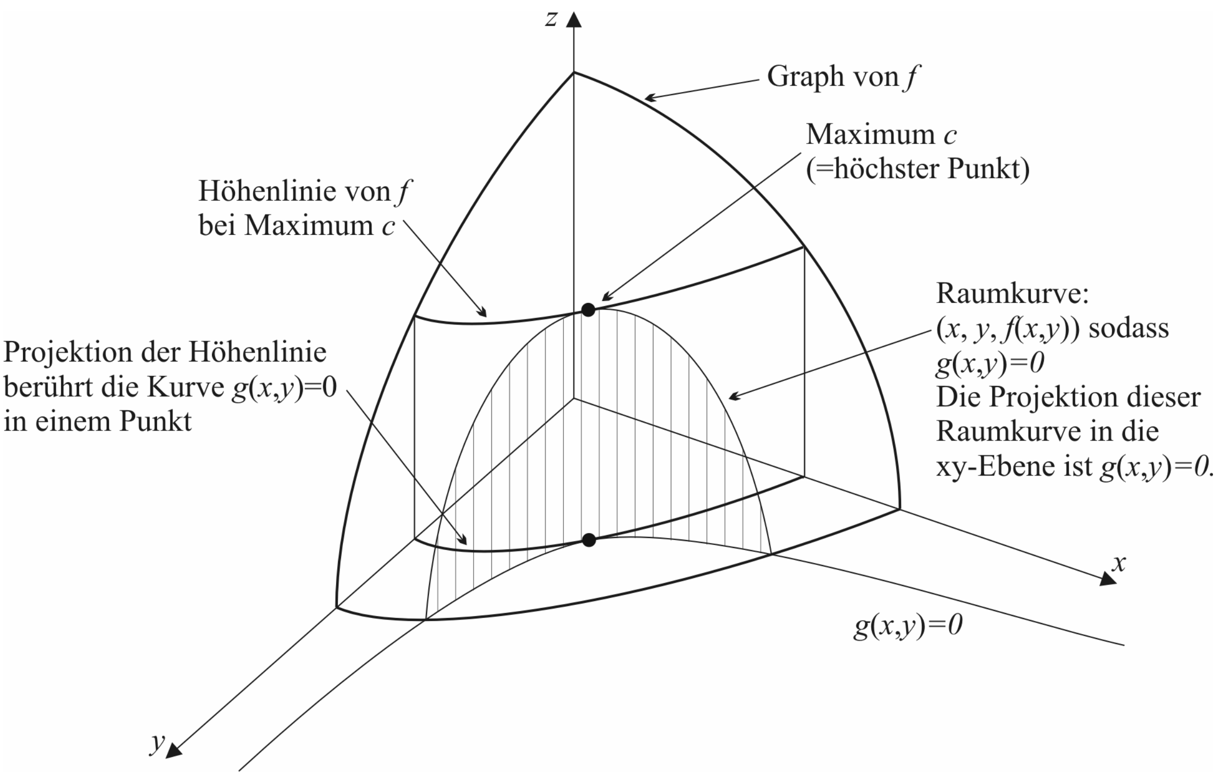
$$2(x+y)(Oy-4xy^2)-2(Oxy-2x^2y^2)=0$$

$$2(x+y)(Ox-4x^2y)-2(Oxy-2x^2y^2)=0$$

→ *Führt zu komplizierter Rechnung. Wir sind nicht motiviert das fertigzurechnen!*

Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Gegeben: $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Gesucht ist Maximum von *f* unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.



→ Die beiden ebenen Kurven $g(x,y)=0$ und $f(x,y)=c$ haben an der max-Stelle dieselbe Tangente.

Die Ableitung der impliziten Funktion gegeben durch $g(x,y)=0$ ist

$$-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Analog ist die Ableitung der Funktion gegeben durch $f(x,y)=c$ gleich

$$-\frac{\frac{\partial(f-c)}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial(f-c)}{\partial y}(x_0,y_0)}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Wenn die Tangenten übereinstimmen, stimmen die partiellen Ableitungen überein:

$$-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ an der Stelle } (x_0,y_0).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\\ g(x,y)=0\end{array}}$$

Notwendige Bedingung für lokales Extremum.
(Zwei Gleichungen in zwei Unbekannten)

Äquivalente Formulierung:

Lagrenge´sche Multiplikatorenmethode
Optimierung mit Nebenbedingung

Gesucht: Extremum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.

Extremstelle (x_0,y_0) erfüllt die beiden Gleichungen

(1) $g(x_0,y_0)=0$

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}=0$

Man tue so als ob man das Extremum der Funktion $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$ zu finden hätte.
Um das zu erreichen leiten wir nach x,y,λ ab.

(A) $\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}$

(B) $\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$

(C) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x,y)$

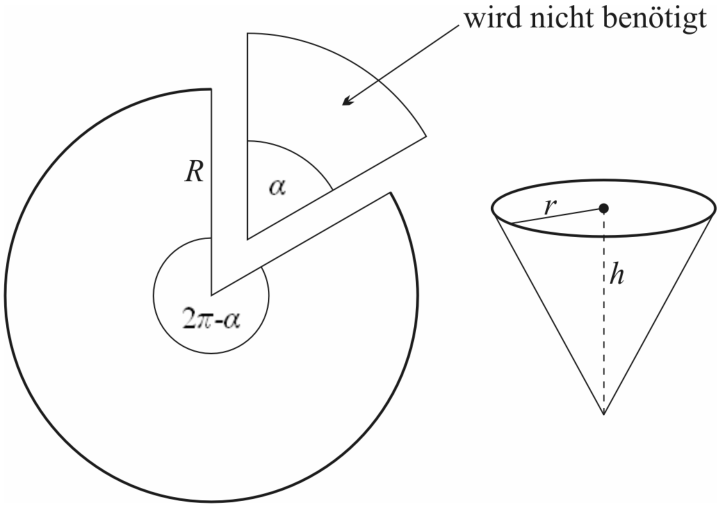
Gleichungen Nullsetzen.

Wenn (x_0, y_0, λ_0) diese drei Gleichungen erfüllen, so gilt $g(x_0, y_0) = 0$ (nach C).

$$\frac{\partial g}{\partial y}\cdot(\mathrm{A}) - \frac{\partial g}{\partial x}\cdot(\mathrm{B}):\ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Beispiel:

Aus einer Kreisscheibe ist ein Kreissektor auszuschneiden, der zum Mantel eines Kegels mit größtmöglichem Volumen zusammengerollt werden kann.



$R(2\pi - \alpha) = 2r\pi$

Wenn r bekannt ist, dann lässt sich daraus α bestimmen.

$V = \frac{r^2\pi h}{3} \to \max$

Nebenbediungung: $r^2 + h^2 = R^2$ R=*const.*

Wir tun so, als ob $L(r,h,\lambda) = \frac{r^2 h\pi}{3} + \lambda(r^2 + h^2 - R^2)$ zu maximieren wäre.

(A) $\frac{\partial L}{\partial r}:\ 2rh\frac{\pi}{3} + \lambda 2r = 0$

(B) $\frac{\partial L}{\partial h}:\ \frac{r^2\pi}{3} + \lambda 2h = 0$

(C) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}:\ r^2 + h^2 - R^2 = 0$

(A) $\lambda = -\frac{2rh\frac{\pi}{3}}{2r} = -h\frac{\pi}{3}$

einsetzen in (B)

$$\frac{r^2\pi}{3} - h\frac{\pi}{3}2h = 0 \qquad | \cdot \frac{3}{\pi}$$
$$r^2 - 2h^2 = 0$$
$$h^2 = \frac{r^2}{2}$$

einsetzen in (C)

$$r^2 + \frac{r^2}{2} - R^2 = 0$$
$$r^2 + \frac{r^2}{2} = R^2$$
$$r^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = R^2$$
$$r^2 = \frac{2}{3}R^2$$
$$r = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}R^2}}}$$

Satz:

Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Wenn (x_0, y_0) ein lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ist, dann gilt:

- Es existiert ein λ_0, sodass die drei partiellen Ableitungen von $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$ beim Punkt (x_0, y_0, λ_0) gleich 0 sind.
- oder $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ verschwinden beide bei (x_0, y_0). (→ degenerierter Fall)

Beispiel:

$x_1 + x_2 + x_3 = K$

$x_1 x_2 x_3 \to \max$

Wir tun so als ob $L(x, y, \lambda) = x_1 x_2 x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - K)$ zu maximieren wäre.

(A) $\frac{\partial L}{\partial x_1}: \quad x_2 x_3 + \lambda = 0$

(B) $\frac{\partial L}{\partial x_2}: \quad x_1 x_3 + \lambda = 0$

(C) $\frac{\partial L}{\partial x_3}: \quad x_1 x_2 + \lambda = 0$

(D) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}: \quad x_1 + x_2 + x_3 - K = 0$

(A) - (B):

$$x_1x_3 - x_2x_3 = 0$$

$$(x_1 - x_2)x_3 = 0$$

$x_3 \neq 0$ muss sein, da $x_3 = 0$ zu $x_1x_2x_3 = 0$ führt.

$\rightarrow$ $x_1 - x_2 = 0$

$$\underline{\underline{x_1 = x_2}}$$

Analog: $\underline{\underline{x_1 = x_3}}$ $\underline{\underline{x_2 = x_3}}$

$\rightarrow$ $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 = K;\qquad x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{K}{3}$

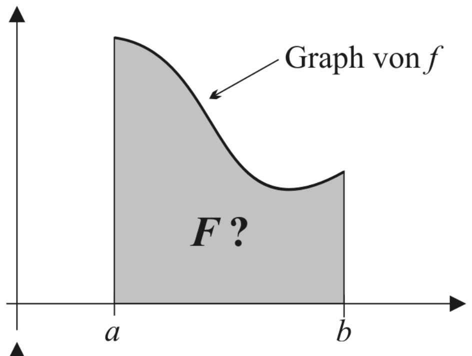
Mitunter ist es günstig umgekehrt ein Gleichungssystem auf ein Optimierungsproblem zurückzuführen. Dies ist der Fall wenn die Gleichungen so komplex sind, dass die Ableitungen schwer zu bilden sind.

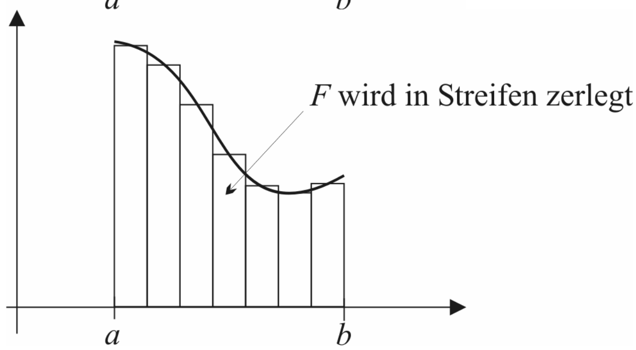
$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten.
Jede Lösung ist eine Minimumstelle von $F(x_1, \dots, x_n) = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_m^2$.
Numerische Verfahren zur Optimierung.

8. Integralrechnung

Gegeben: $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$





F wird approximiert durch eine Summe von schmalen Rechtecken.
In einer Folge werden die Breiten schrittweise verringert $\rightarrow 0$.
→ Das Integral ist der Grenzwert dieser Konstruktion.

Definitionen:

Eine Zerlegung eines Intervalls $[a,b]$ ist gegeben durch
$[a,b]=[x_1=a,x_2]\cup[x_2,x_3]\cup[x_3,x_4]\cup\ldots\cup[x_{n-1},x_n=b]$
wobei $a=x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n=b$ ist.

Die Schrittweite ist maximal $(x_{i+1}-x_i)$ und wird in der Regel mit *h* bezeichnet.

Sei $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion
Z, eine Zerlegung von $[a,b]$, ist gegeben durch $x_1=a,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n=b$

Für jedes Intervall $[x_i,x_{i+1}]$ sei $y_i\in[x_i,x_{i+1}]$.

Dann heißt $\sum_{i=1}^{n-1} f(y_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$ eine zu *Z* gehörende Rechteckssumme von *f*.

Definition:

Eine folge von Rechteckssummen mit Schrittweite gegen 0 ist gegeben durch die Folge von Zerlegungen Z_1,Z_2 ...
sowie für jede dieser Zerlegungen eine Folge von dazugehörigen Stützstellen:
$Z_i=a=x_{1,i}<x_{2,i}<\ldots<x_{n_i,i}=b$
Stützstellen: $y_{1,i}\in[x_{1,i},x_{2,i}],\quad y_{2,i}\in[x_{2,i},x_{3,i}]$

Die Folge der Rechteckssummen ist dann die Folge der reellen Zahlen

$$\left(\sum_{j=1}^{n_i-1} f(y_j)\cdot\left(x_{j+1,i}-x_{j,i}\right)\right)_i$$

(= Flächeninhalt der Rechtecke, die zu Z_i gehören)

Definition:

Wenn jede Folge von Rechteckssummen mit Schrittbewegungen gegen 0 konvergiert, dann heißt *f* integrierbar, und der Grenzwert einer solchen Rechteckssumme (egal welcher, es kommt immer das selbe heraus) heißt Integral von *f* von *a* bis *b*.
Geschrieben:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

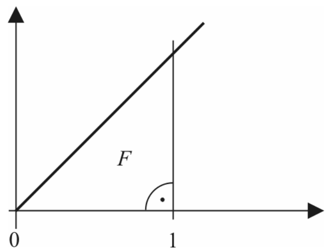
Beispiel:

$a=0,\quad b=1;\quad f:[a,b]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x$

Ist *f* integrierbar?

Wenn ja, was ist der Wert von $\int_0^1 x\,dx$?

(Das Ergebnis müsste $\frac{1}{2}$ sein.)



$Z_i=\left[0,\frac{1}{i}\right]\cup\left[\frac{1}{i},\frac{2}{i}\right]\cup\ldots\cup\left[\frac{i-1}{i},1\right]$ (Zerlegung in *i* gleich große Teilintervalle)

$x_{1,i}=0,\quad x_{2,i}=\frac{1}{i},\quad x_{3,i}=\frac{2}{i},\quad \ldots,\quad x_{j,i}=\frac{j-1}{i}$

$x_{n_i,i}=x_{i+1,i}=\frac{i}{i}=1$

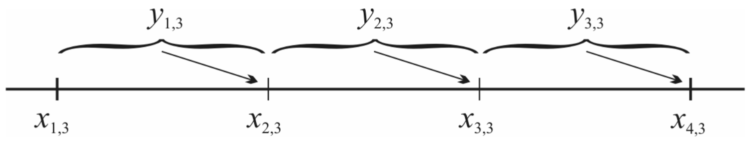
(n_i ist die Anzahl der Teilintervalle +1)

$y_{j,i}\in\left[x_{j,i},x_{j+1,i}\right]=\left[\frac{j-1}{i},\frac{j}{i}\right]$

Wähle als Stützstellen den rechten Randpunkt $y_{j,i}=x_{j+1,i}=\frac{j}{i}$.

z.B.: $Z_3=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$

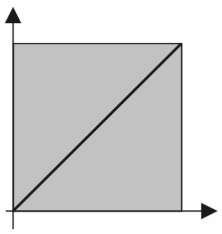
$[0,1]=\left[a=x_{1,3},x_{2,3}\right]\cup\left[x_{2,3},x_{3,3}\right]\cup\left[x_{3,3},x_{4,3}\right]$



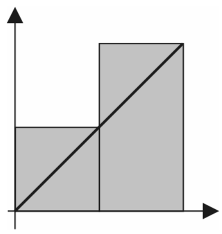
$$RS_3 = \underset{\frac{1}{3}}{(x_{2,3} - x_{1,3})}\,\underset{\frac{1}{3}}{(y_{1,3})} + \underset{\frac{1}{3}}{(x_{3,3}, x_{2,3})}\,\underset{\frac{2}{3}}{(y_{2,3})} + \underset{\frac{1}{3}}{(x_{4,3}, x_{3,3})}\,\underset{1}{(y_{3,3})}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$a_1 = 1$



$a_2 = \frac{3}{4}$



$a_3 = \frac{2}{3}$

$$a_i = \sum_{j=1}^{n_i - 1} \left(x_{j+1,i} - x_{j,i} \right) \cdot y_{j,i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i} \cdot \frac{j}{i} = \frac{1}{i^2} + \frac{2}{i^2} + \ldots + \frac{i-1}{i^2} + \frac{1}{i} =$$

$$= \frac{1}{i^2} \cdot \sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{j^2} \cdot \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i(i+1)}{2i^2} = \underline{\underline{\frac{i+1}{2i}}}$$

$$\boxed{\text{Formel: } \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \lim_{i \to \infty} \frac{i+1}{2i} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Fundamentalsatz der Integralrechnung

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist *f* integrierbar.

Beweis:

Zu zeigen ist dass jede Folge von Rechtecksummen mit Schrittweite $\to 0$ einen Grenzwert besitzt.

Wir nehmen an, es ist eine Folge von Rechtecksummen gegeben:

(1) Folge von Zerlegungen, Z_i.

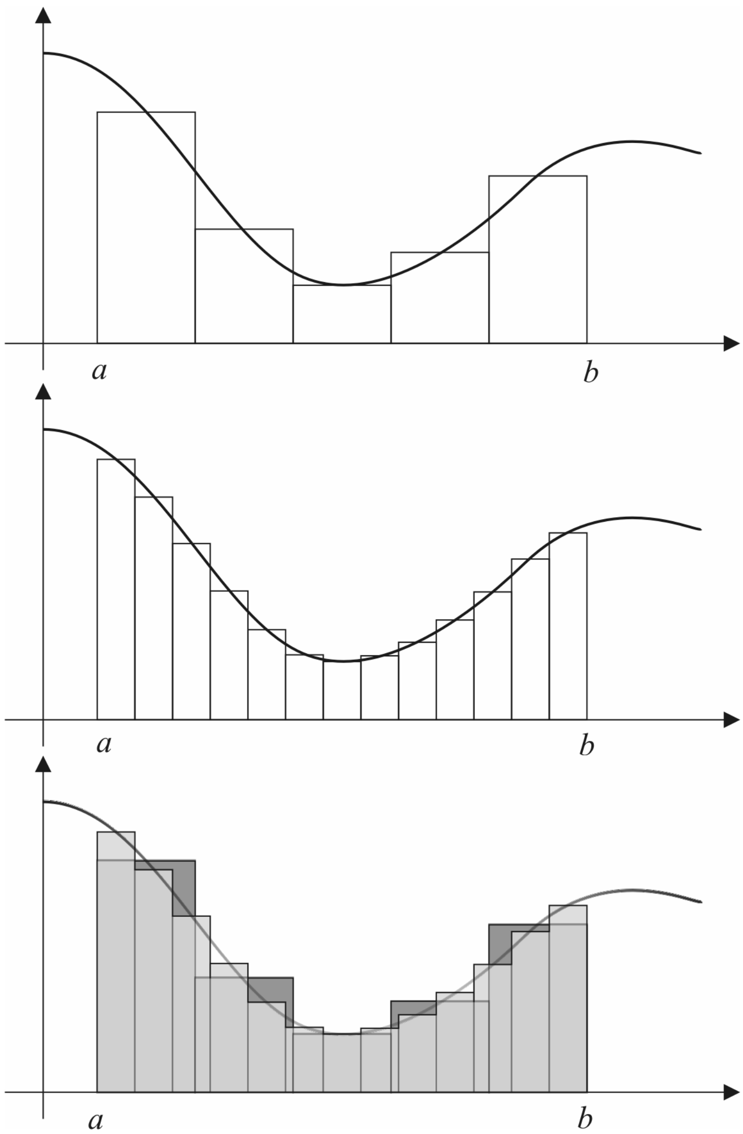
$[a,b] = \left[a = x_{1,i}, x_{2,i} \right] \cup \left[x_{2,i}, x_{3,i} \right] \cup \ldots \cup \left[x_{n_i - 1,i}, x_{n_i,i} = b \right]$

Schrittweite $h_i := \max(x_{j+1,i}, x_{j,i})$

Die Folge $\left(h_i \right)_i$ konvergiert gegen 0.

(2) Für jede Zerlegung Z_i Stützstellen $y_{j,i} \in \left[x_{j,i}, x_{j+1,i} \right]$.

Um die Konvergenz der Folge von Rechtecksummen zu zeigen reicht es zu zeigen: Für jedes noch so kleine $\Sigma > 0$ gibt es einen Index N, sodass zwei Rechtecksummen mit Index $\geq N$ sich um nicht mehr als Σ unterscheiden.



Wenn die Schrittweiten der kleinen und der großen Rechtecksummen klein genug ist, dann ist auch die (dunkelgraue) Differenzfläche klein. (kleiner als Σ).

Annahme:

$i_1, i_2 > N$ (N ist erst zu bestimmen)

$Z_{i_1} \ldots$ große Rechtecksumme

$Z_{i_2} \ldots$ kleine Rechtecksumme

Für jeden Punkt x im Intervall $[a,b]$ lässt sich die Höhe der Differenzfläche über x schreiben als $f\underbrace{(y_{j_1,i_1})}_{\text{gr. Stützstelle}} - f\underbrace{(y_{j_2,i_2})}_{\text{kl. Stützstelle}}$.

Daher ist $\left|y_{j_1,i_1} - x\right| \leq h_{i_1}$

$\left|y_{j_2,i_2} - x\right| \leq h_{i_2}$

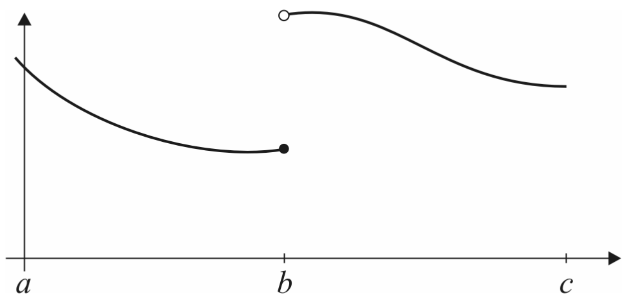
Daher ist $\left|y_{j_1,i_1} - y_{j_2}\right| \leq h_{i_1} + h_{i_2}$

Da *f* stetig ist, gibt es eine Funktion $\delta:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ (Stetigkeitsrate) sodass
$$|x_1-x_2|\le\delta(\Sigma)\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\le\Sigma$$

In unserem Fall wollen wir erreichen dass $|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{\Sigma}{b-a}$.
Die Breite der Differenzrechtecke summieren zu $b-a$, wenn die Höhen beschränkt sind durch $b-a$, dann ist die Differenzfläche $\le(b-a)\cdot\frac{\Sigma}{b-a}=\Sigma$.
Wir müssen daher dafür sorgen dass $\left|y_{j_1,i_1}-y_{j_2,i_2}\right|\le\delta\left(\frac{\Sigma}{b-a}\right)$ ist.
Nachdem $\left|y_{j_1,i_1}-y_{j_2,i_2}\right|\le h_{i_1}+h_{i_2}$ ist, recht es dafür zu sorgen, dass
$h_{i_1}\le\frac{\delta\left(\frac{\Sigma}{b-a}\right)}{2}$ und $h_{i_2}\le\frac{\delta\left(\frac{\Sigma}{b-a}\right)}{2}$.

Das ist möglich, da $(h_i)_i$ eine Nullfolge ist. (Für jeden Wert Σ' (insbesondere für $\Sigma'=\frac{\delta\left(\frac{\Sigma}{b-a}\right)}{2}$) gibt es einen Index *N*, sodass $h_i\le\Sigma'$ für $i\ge N$.) □

Auch unstetige Funktionen können integrierbar sein:



$a<b<c$

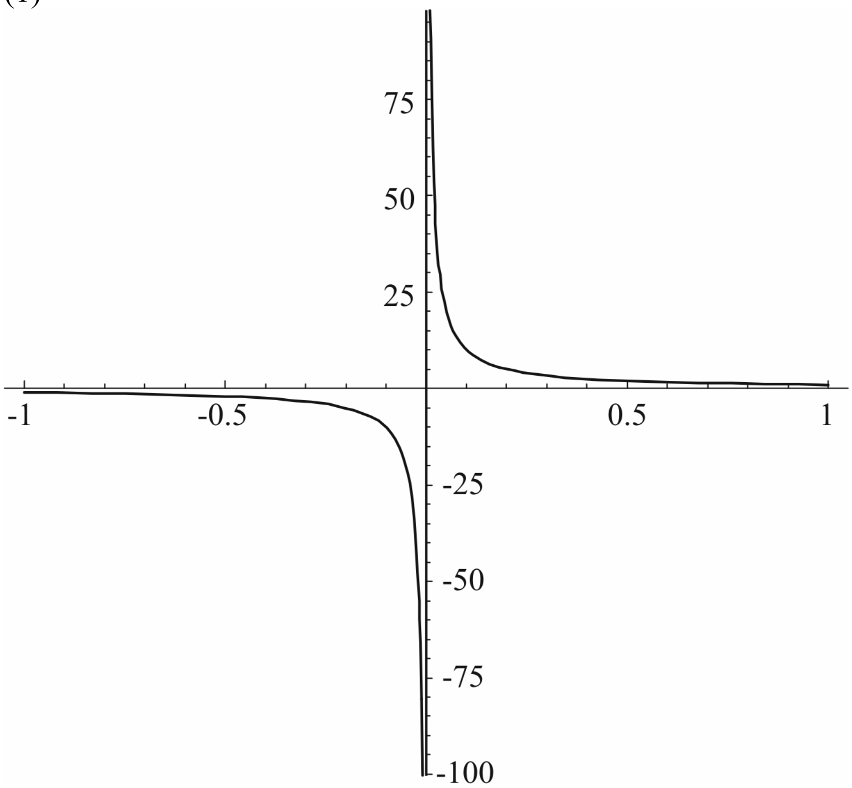
Der Wert von $f(x)$ bei $x=b$ hat keinen Einfluss auf das Integral.

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

Beide Teilintegrale existieren, daher existiert auch das Integral der Sprungfunktion.

Beispiele von nichtintegrierbaren Funktionen

(1)



$f:[-1,1]\to\mathbb{R},$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

"unendlicher Sprung"

(2)

Eine Funktion mit sehr vielen endlichen Sprüngen:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } x \text{ rational (d.h. } x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N}) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Springt unendlich oft zwischen 0 und 1 hin und her.
Eine Rechtecksumme mit rationalen Stützstellen hat den Wert 0. Eine Rechtecksumme mit irrationalen Stützstellen hat den Wert 1. Daraus lässt sich eine Folge von Rechtecksummen konstruieren, die zwischen 0 und 1 springt.

Def.:

Sei f eine stetige Funktion $D \to \mathbb{R}$ ($D = \mathbb{R}$ oder ein Intervall)
Dann heißt $F: D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von *f*, wenn *F* stetig differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

Beispiele:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}$

Stammfunktion: $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Wenn *f*,*g* beide stetig, *F* Stammfunktion von *f*, *G* Stammfunktion von *g*, dann ist *F*+*G* Stammfunktion von *f*+*g*.
Beispiel:

$$f(x) = x^2 + x^3 + 1 \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + x$$
$$g(x) = 2x^2 - 3\sin(x) \quad G(x) = 2\frac{x^3}{3} + 3\cos(x).$$

Bemerkung:
Die Stammfunktion ist nicht eindeutig! (Konstanten können addiert werden)

Hauptsatz

Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann besitzt f eine Stammfunktion $F:[a,b] \to \mathbb{R}$.
Für das Integral gilt die Formel $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
Beispiel:

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1} - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Beweis:

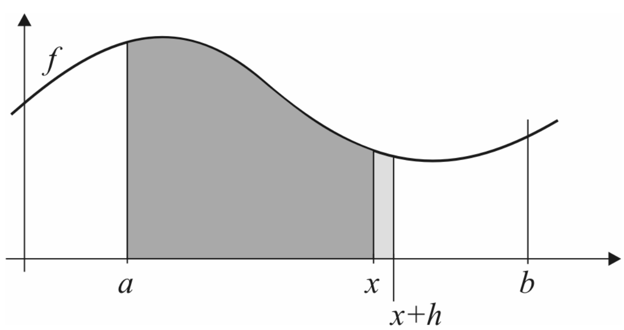
$$H(x) := \int_a^x f(y)\,dy$$

Bemerkung 1:

$\int_a^x f(x)\,dx$ wäre falsch!

Bemerkung 2:

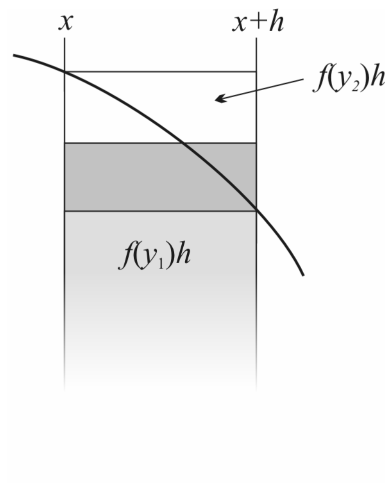
$\int_a^x f(y)\,dy$ existiert wegen Fundamentalsatz.



Behauptung: H ist Stammfunktion von f.
Beweis der Behauptung: $H'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{h}$.

$H(x)$	dunkelgraue Fläche
$H(x+h)$	hell- und dunkelgraue Fläche
$H(x+h)-H(x)$	hellgraue Fläche

Es sei y_1 Minimumstelle von f im Intervall $[x, x+h]$ ($f(y_1)$ Minimum).
Es sei y_2 Maximumstelle von f im Intervall $[x, x+h]$ ($f(y_2)$ Maximum).



Die dunkelgraue Fläche liegt zwischen den Werten der Rechteckflächen $f(y_1)h$ und $f(y_2)h$.

$$f(y_1)h \le H(x+h)-H(x) \le f(y_2)h$$
$$f(y_1) \le \frac{H(x+h)-H(x)}{h} \le f(y_2)$$
$$\lim_{h\to 0} y_1 = \lim_{h\to 0} y_2 \text{ da } y_1, y_2 \in [x, x+h]$$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{f(y_1)}_{\substack{f(x)\\(f \text{ stetig})}} \le \lim_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} \underbrace{f(y_2)}_{\substack{f(x)\\(f \text{ stetig})}}$$

Daher ist $\lim\limits_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{h} = f(x) = H'(x)$, d.h. H ist eine Stammfunktion von f.

Existenz einer Stammfunktion:
Es sei $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion. (z.B. $F = H$)

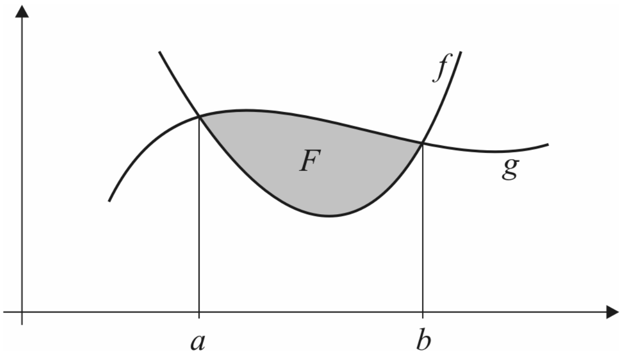
Wir haben noch zu zeigen, dass $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

$F - H: \quad x \mapsto F(x) - H(x)$ ist differenzierbar und
$(F-H)'(x): \quad F'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$F - H$ ist daher konstant, $F(x) - H(x) = C$.
$F(x) = H(x) + C$
$F(b) - F(a) = H(b) + c - \big(H(a) + c\big) = H(b) - H(a)$

$$= \int_a^b f(y)\,dy - \underbrace{\int_a^a f(y)\,dy}_{=0} = \int_a^b f(y)\,dy = \underline{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \square$$

Mit Hilfe des Hauptsatzes lassen sich Flächen berechnen, die von Kurven begrenzt sind.

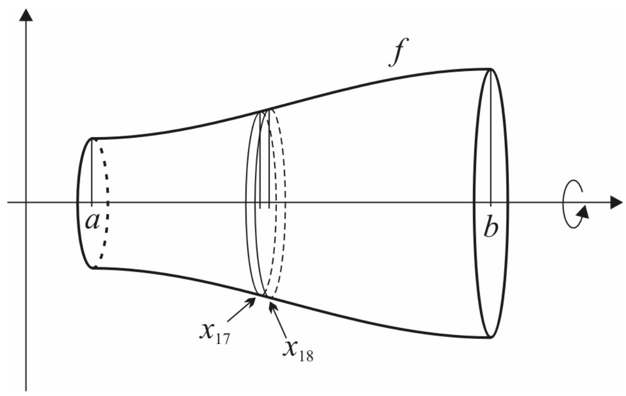


$$F = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

Anwendungen:

Beispiele:

(1) Volumen eines Rotationskörpers



f stetig, $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$

Berechnung des Volumens des Rotationskörpers, der vom rotierenden Graphen und den beiden Kreisscheiben bei *a* bzw. *b* eingeschlossen wird.

Wir unterteilen $[a,b]$ in Teilintervalle.

$[a,b] = [a = x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n = b]$.

Das Volumen der Kreisscheibe, die zum *i*-ten Intervall gehört:

$V = r^2 \pi h = f(y_i)^2 \pi (x_{i+1} - x_i)$ $\qquad y_i$ ist eine Stützstelle $\in [x_i, x_{i+1}]$

(z.B.: $y_i := x_i$)

Summe der Kreisscheiben:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(y_i)^2 \pi (x_{i+1} - x_i)$$

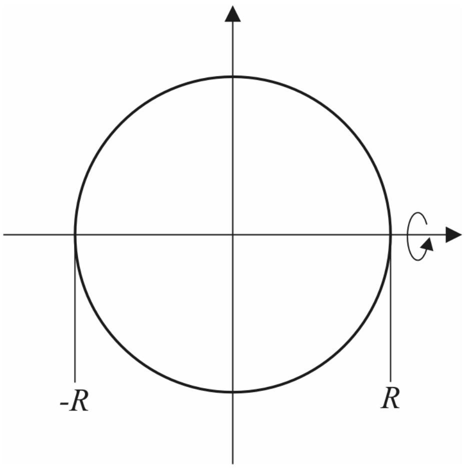
Definieren:

$g : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x)^2 \pi$

Die Summe der Kreisscheiben ist eine Rechtecksumme für *g*. Wenn die Schrittweite der Zerlegung gegen 0 geht, geht die Summe der Kreisscheiben gegen das Volumen des Rotationskörpers, und die Rechtecksumme von *g* gegen das Integral:

$$V = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)^2 \pi\,dx = \underline{\pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$$

(2) Kugel (ergibt sich durch die Rotation eines Halbkreises



$$f:[-R,R]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sqrt{R^2-x^2}$$

$$V=\pi\int_{-R}^{R} f(x)^2\,dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)dx=$$

$$=\pi\int_{-R}^{R} R^2-x^2\,dx=$$

$$=\pi\left(\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=R}-\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-R}\right)=$$

$$=\pi\left(\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right)=\ldots=\pi\frac{4}{3}R^3$$

Trick, ein Volumen in Scheiben zu zerlegen, ist verallgemeinerbar.