9 Stetigkeit (2)

Proposition 1. *Die folgenden Funktionen sind stetig.*

1. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$;
2. $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ $(1 \leq j \leq n)$;
3. $p_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ *wo* $1 \leq k \leq n$.

Falls eine Abbildung f vektorwertig ist, das heißt, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, mit $n > 1$, so nennt man die n Funktionen

$$\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_n \circ f$$

die **Koordinatenfunktionen von** f oder die **Komponenten von** f. Falls $f(x) = (y_1, \ldots, y_n)$, gilt $(\pi_j \circ f)(x) = y_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Die Stetigkeit einer vektorwertigen Abbildung bedeutet einfach die Stetigkeit aller ihrer Komponetenfunktionen.

Proposition 2. *Sei X metrischer Raum, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

1. *f stetig in $x \in X$* $\iff \forall j$ ($\pi_j \circ f$ stetig in x).
2. *f stetig* $\iff \forall j$ ($\pi_j \circ f$ stetig).

Proof. 1. Ist f in x stetig, so gilt das auch für jede Komposition $\pi_j \circ f$. Seien umgekehrt alle Koordinatenfunktionen $\pi_j \circ f$ stetig in x. Sei $\varepsilon > 0$ und $y = f(x)$. $\forall j$ mit $1 \leq j \leq n$ $\exists \delta_j > 0$ sodaß

$$\pi_j \left(f(K_{\delta_j}(x)) \right) \subseteq (\pi_j(f(x)) - \varepsilon, \pi_j(f(x)) + \varepsilon) = (y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon).$$

Mit $\delta = \min_{j=1}^n \delta_j$ gilt dann $f(K_\delta(x)) \subseteq (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon)$. Das bedeutet gerade $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\epsilon(f(x))$, wenn wir den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm versehen; also ist f stetig in x.[1]

2. ist folgt unmittelbar aus 1. $\square$

Vektorwertige Abbildungen und ihre Komponenten treten häufig auf.
Wir verabreden:

Definition 1. *Falls $f : X \longrightarrow R^n$, so bezeichnen $f^1, \ldots f^n$ die Komponenten von f, also*

$$f^j : X \longrightarrow \mathbb{R}, \; f^j(x) = (\pi_j \circ f)(x) \quad (1 \leq j \leq n).$$

Example 1. *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t^2, \frac{1}{t}, 2t + 3)$ ist die Parametrisierung einer Raumkurve. Die Komponenten von f sind die stetigen Funktionen*

$$f^1 = \pi_1 \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; t \mapsto t^2$$
$$f^2 = \pi_2 \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; t \mapsto \frac{1}{t}$$
$$f^3 = \pi_3 \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \; t \mapsto 2t + 3.$$

Nach Proposition 2 ist die Abbildung f stetig.

[1] Wir verwenden hier die im Kapitel 6 gezeigte Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$, das heißt, die Freiheit der Wahl einer Norm, solange es um topologische Eigenschaften wie 'Stetigkeit' geht. Der Maximumsnorm - $||(x)|| = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ - ist die Annemlichkeit eigen, daß die Kugel $K_\varepsilon(x)$ genau das Produkt der Intervalle $(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$ ist.

Vektorwertige Abbildungen und Funktionen stehen in enger Beziehung.

Proposition 3. *Sei X eine Menge. Die Abbildung*

$$(\mathbb{R}^n)^X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^X \times \cdots \times \mathbb{R}^X}_{n \text{ Faktoren}}, \ f \mapsto (f^1, \ldots, f^n) \tag{1}$$

ist bijektiv.

Sind also $g_1, \ldots, g_n$ n Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f^1 = g_1 \wedge \ldots \wedge f^n = g_n$. Wir bezeichnen dieses f mit $(g_1, \ldots, g_n)$. Insbesondere gilt für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ somit $f = (f^1, \ldots, f^n)$. Das kommt einer formalen Identifikation von $(\mathbb{R}^n)^X$ mit $(\mathbb{R}^X)^n$ gleich, wofür (1) die Rechtfertigung liefert.

Für metrische Räume X, Y bezeichnet $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$. Proposition 2 besagt nun, daß, falls X ein metrischer Raum ist, die Bijektion (1) die Menge $C(X, \mathbb{R}^n)$ auf die Menge $C(X, \mathbb{R}) \times \cdots \times C(X, \mathbb{R})$ abbildet, also eine Bijektion

$$C(X, \mathbb{R}^n) \ \longleftrightarrow \ C(X, R)^n$$

vermittelt.

Definition 2. *Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eien Abbildung zwischen den metrischen Räumen X, Y. f heißt eine **offene Abbildung** wenn das Bild jeder in X offenen Menge offen in Y ist. Also*

$$f \text{ offen } \leftrightarrow \ \forall \ G \subseteq X \ (G \text{ offen } \rightarrow \ f(G) \text{ offen}).$$

Proposition 4. *Die Projektion $p_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $(k \leq n)$ ist offen.*

Proof. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel $K_\varepsilon(x)$ in der Maximumsnorm. Es gilt

$$K = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$$

und daher

$$p_k(K) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon)$$

also offen. Da jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Vereinigung von offenen Kugeln ist, $G = \bigcup_j K_j$ folgt,

$$p_k(K) = p_k\big(\bigcup_j K_j\big) = \bigcup_j p_k(K_j)$$

was offen ist. □

Die Abbildungen p_k sind also stetig und offen. Diese Aussage gilt insbesondere auch für die Projektionen $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Satz 1.

1. *Die Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ ist stetig*

2. *Die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ ist stetig.*

Proof. 1. Es bezeichne a_n die Addition in $\mathbb{R}^n$, also

$$a_n\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ a_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

und π_j die j-te Projektion $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Wegen Proposition 2 genügt es zu zeigen, daß alle Funktionen

$$\pi_j \circ a_n\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \longrightarrow x_j + y_j \tag{2}$$

stetig sind. Nun ist - wieder wegen Prop. 2 - für jedes j die Abbildung

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \mapsto (x_j,y_j) \tag{3}$$

stetig, da ihre beiden Koordinatenfunktionen Projektionen $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind. Wenn wir zeigen können, daß die Addition $a_2\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda+\mu$ stetig ist, dann ist (2) als Komposition $a_2 \circ (3)$ ebenfalls stetig.

Um a_2 als stetig zu erkennen, versehen wir $\mathbb{R}^2$ mit der Norm N_1. Für beliebige $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ ist dann

$$|a_2(y)-a_2(x)| = |y_1+y_2-(x_1+x_2)| \le |y_1-x_2| + |y_2-x_2| =$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = d(y,x).$$

Daher ist $|a_2(y)-a_2(x)| < \varepsilon$ wenn $d(y,x) < \varepsilon$.

2. Es sei $s_n\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $s_n(\lambda,x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$ die Skalaroperation des $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen zuerst, daß die Multiplikation auf $\mathbb{R}$, also $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{s_1} \mathbb{R}$ stetig ist. Sei dazu $(\lambda,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ irgend ein Punkt, den wir uns fest denken, und $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zahl $\delta > 0$ sodaß für beliebige $(\mu,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} \right\| < \delta \ \Rightarrow\ |s_1(\mu,y) - s_1(\lambda,x)| < \varepsilon$$

wobei wir uns für irgend eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ entscheiden können. Angenommen wir haben so ein δ schon. Da

$$s_1(\mu,y) - s_1(\lambda,x) = \mu y - \lambda x = (\mu-\lambda)(y-x) + (\mu-\lambda)x + \lambda(y-x),\ \text{folgt}$$
$$|s_1(\mu,y) - s_1(\lambda,x)| \le |\mu-\lambda||y-x| + |\mu-\lambda||x| + |\lambda||y-x|.$$

Wählen wir die Maximumsnorm, dann folgt aus $\left\| \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} \right\| < \delta$, daß $|\mu-\lambda| < \delta$ und $|y-x| < \delta$, sodaß

$$\begin{aligned} |\mu-\lambda||y-x| &< \delta^2 \\ |\mu-\lambda||x| &\le \delta|x| \\ |\lambda||y-x| &\le \delta|\lambda| \end{aligned}$$

und daher $|s_1(\mu,y) - s_1(\lambda,x)| < \delta^2 + \delta|x| + \delta|\lambda|$. Falls $\delta < 1$ folgt $\delta^2 < \delta$, ist

$$|s_1(\mu,y) - s_1(\lambda,x)| < \delta + \delta|x| + \delta|\lambda| = \delta(1+|x|+|\lambda|).$$

Dieser letzte Ausdruck wird dann kleiner als ε, wenn $\delta < \varepsilon/(1+|x|+|\lambda|)$. Wählen wir also bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ so, daß

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+|x|+|\lambda|}\right\}$$

so folgt aus $\left\| \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} \right\| < \delta$, daß $|s_1(\mu, y) - s_1(\lambda, x)| < \varepsilon$. Das bedeutet, die Funktion s_1 ist im Punkt (λ, x) stetig. Da der beliebig gewählt war, ist s_1 überall stetig.

Die Stetigkeit von s_n für beliebiges $n > 1$ folgt nun wie zuvor durch Anwendung von Prop. 2: s_n ist stetig, wenn für alle $1 \leq j \leq n$ die j-te Koordinatenfunktion von s_n, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \lambda x_j$ stetig ist. Diese letzte Funktion kann dargestellt werden als Komposition

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{(\pi_1, \pi_{j+1})} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{s_1} \mathbb{R}$$

wo die Abbildung (π_1, π_{j+1}) gegeben ist durch $(\pi_1, \pi_{j+1})(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = (\lambda, x_j)$. Diese Abbildung ist stetig nach Prop. 2 - ihre Koordinatenfunktionen sind gerade die stetigen Projektionen π_1 und π_{j+1} - sodaß s_n als Kompositum stetiger Abbildungen selbst stetig ist. $\square$

Bei gleichem Beweisgang zeigt sich, daß für beliebige normierte Räume E die Addition $E \times E \xrightarrow{+} E$ und die Skalaroperation $\mathbb{R} \times E \xrightarrow{s} E$ stetige Abbildungen sind.

Es sei X eine Menge und f eine Abbildung, definiert auf einer Teilmenge A von X mit Werten in einem Vektorraum E, also $X \supseteq A \xrightarrow{f} E$. Falls g eine weitere solche Abbildung, definiert auf einer möglicherweise anderen Menge $B \subseteq X$ mit Werten im gleichen Vektorraum ist, $X \supseteq B \xrightarrow{g} E$, so gibt es die Summenabbildung

$$f + g \colon A \cap B \longrightarrow E, \ x \mapsto f(x) + g(x).$$

Es ist klar, daß $f + g$ genau die Komposition der Abbildung $x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der Additionsabbildung von E ist, also

$$f + g = A \cap B \xrightarrow{(f,g)} E \times E \xrightarrow{+} E$$

wo $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ und $+(u, v) = u + v$.

Satz 2. *Es seien A, B Teilmengen des metrischen Raumes X, $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g \colon B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen, und $x \in A \cap B$.*

1. *f stetig in x und g stetig in $x \Rightarrow f + g$ stetig in x.*
2. *f stetig und g stetig $\Rightarrow f + g$ stetig.*

Proof. 1. Seien f und g stetig in x. Dann sind auch $f|_{A \cap B}$ und $g|_{A \cap B}$ stetig in x. Nach Proposition 2 bedeutet das, daß alle Koordinatenfunktionen sowohl von $f|_{A \cap B}$ als auch von $g|_{A \cap B}$ in x stetig sind. Die Abbildung

$$(f, g) \colon A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}, \ y \mapsto (f(y), g(y))$$

hat nun genau die n Koordinatenfunktionen von $f|_{A \cap B}$ und die n Koordinatenfunktionen von $g|_{A \cap B}$ zu ihren Koordinatenfunktionen (also $2n$ Stück), und da diese in x stetig sind, ist es auch (f, g). Komposition mit der stetigen Addition zeigt, daß $f + g$ in x stetig ist. Punkt 2. ist wieder ein unmittelbare Konsequenz aus Punkt 1. $\square$

Natürlich ist auch die Abbildung $f - g\colon A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) - g(x)$ stetig, falls f und g stetig sind. Im Falle, daß f, g reellwertig, also Funktionen sind, gilt darüberhinaus der folgende Sachverhalt.

Satz 3. *X metrisch, $X \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $X \supseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $x \in A \cap B$.*

1. *f stetig in x und g stetig $x \Rightarrow fg$ stetig in x.*
2. *f stetig in x und g stetig in x und $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in x.*
3. *f und g stetig $\Rightarrow fg$ stetig.*
4. *f und g stetig $X \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig auf $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$.*

Proof.

1. Seien f und g stetig in x. Analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 2 folgt die Stetigkeit in x von $(f, g)\colon A \cap B \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$: $f|_{A\cap B}$ und $g|_{A\cap B}$ sind stetig in x, nach Proposition 2 also auch (f, g).[2] Da die Multiplikation $\mu\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ global stetig, also auch stetig in $(f(x), g(x))$ ist, folgt daß $\mu \circ (f, g)$ stetig in x ist. $\mu \circ (f, g) = fg$, also ist fg in x stetig.

2. Die Menge $C := \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$ ist der Definitionsbereich von $\frac{f}{g}$, $C = \operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right)$. Nach Voraussetzung sind f und g stetig in x und $g(x) \neq 0$, daher ist $x \in C$ und die Restriktionen $f|_C$ und $g|_C$ sind stetig in x. Darüberhinaus gilt $\operatorname{im}(g|_C) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodaß die Komposition
$$\frac{1}{g|_C} = C \xrightarrow{g|_C} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\frac{1}{t}} \mathbb{R}$$
stetig in x ist. Die Funktion $C \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y \mapsto (f(y), \frac{1}{g(y)})$ hat die in x stetigen Funktionen $f|_C$ und $\frac{1}{g|_C}$ als ihre Komponentenfunktionen, ist somit stetig (nach Prop. 2). Hintenanhängen der stetigen Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$ zeigt, daß $\frac{f}{g}$ stetig in x ist.

3. folgt durch Generalisierung aus 1.

4. ebenso aus 2.

□

Man nennt eine Funktion $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich als Summe von Produkten konstanter Funktionen und Projektionen $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ darstellen läßt, eine **Polynomfunktion**. Der Quotient zweier Polynomfunktionen heißt **rationale Funktion**. So ist
$$(x, y, z) \mapsto x^3y^5z^2 + \frac{13}{7}x^2yz^3 - 5xy^4z + 2xy - z + 11$$
ein Beispiel einer Polynomfunktion auf $\mathbb{R}^3$, während
$$(x, y) \mapsto \frac{3x^5y^2 - x^2y - \frac{4}{3}x - y + 1}{x^2 + y^2 - 1}$$

[2] Die Komponentenfunktionen von (f, g) sind ja gerade $f|_{A\cap B}$ und $g|_{A\cap B}$.

eine rationale Funktion auf $\mathbb{R}^2$ darstellt. Polynomfunktionen sind global definiert, rationale Funktionen nur dort, wo der Nenner ungleich 0 ist, in obigem Beispiel überall in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Ausnahme des Einheitskreises $\{(x, y) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Die obigen Ausführungen zeigen, daß alle Polynomfunktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ global stetig sind. Rationale Funktionen sind stetig auf ihren Domänen.

Wir formulieren zuletzt 3 Aussagen über das Zusammenspiel von Stetigkeit und Zusammenhang. Der erste Satz ist grundlegend, er besagt, daß das stetige Bild eines zusammenhängenden Raums wieder zusammenhängend ist.

Satz 4. *X, Y metrische Räume, $f: X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist $f(X)$ zusammenhängend.*

Proof. Da $f: X \longrightarrow Y$ stetig ist, ist auch die Abbildung $X \longrightarrow \mathrm{im}(f)$, $x \mapsto f(x)$ stetig; wir bezeichnen sie diesmal auch mit f. Wir haben zu zeigen, daß es in $\mathrm{im}(f)$ nur triviale clopens gibt, also nur $\emptyset$ und $\mathrm{im}(f)$ selbst. Sei also $C \subseteq \mathrm{im}(f)$ ein clopen. C ist also als Teilmenge von $\mathrm{im}(f)$ abgeschlossen und offen. Weil f stetig ist, folgt $f^{-1}(C)$ ist clopen in X. Da X ein zusammenhängender Raum ist, hat er nur triviale clopens, d.h., $f^{-1}(C) = \emptyset \vee f^{-1}(C) = X$. Nun ist $f: X \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ surjektiv, daher gilt $f(f^{-1}(C) = C$. Somit folgt $C = \emptyset \vee C = f(X)$, was zu zeigen war. □

Der nächste Satz beinhaltet etwas, das wir immer schon wollten: daß der Graph einer stetigen Abbildung in einem Stück vor uns liegt, d.h., er ist zusammenhängend.

Definition 3. *Der Graph eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist die Menge*

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Satz 5. *$X \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$X \text{ zusammenhaengend} \iff \mathrm{Graph}(f) \text{ zusammenhaengend.}$$

Proof. Wir verwenden die beiden Abbildungen

$$F: X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (x, f(x))$$

und die Projektion

$$p: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \ldots, x_m).$$

Es gilt $\mathrm{im}(F) = \mathrm{Graph}(f)$, sodaß wir F als Bijektion $X \longrightarrow \mathrm{Graph}(f)$ sehen können, deren Inverse die Restriktion von p auf $\mathrm{Graph}(f)$ ist, also

$$f^-1 = p|_{\mathrm{Graph}(f)}.$$

Weiters gilt, daß das Tupel der Komponentenfunktionen von F gegeben ist durch

$$(\pi_1|_X, \ldots, \pi_m|_X, f^1, \ldots, f^n)$$

wobei π_j die Koordinatenfunktion $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Die Komponenten von f kommen unter denen von F vor, $F^{m+1} = f^1, \ldots, F^{m+n} = f^n$, die ersten m Komponenten sind die stetigen Projektionen $\pi_j|_X$. Daraus folgt, daß F genau dann stetig ist, wenn f stetig ist.

Wenn nun X zusammenhängt, ist, da f als stetig vorausgesetzt war, F stetig, und daher $\mathrm{Graph}(f) = \mathrm{im}(F)$ zusammenhängend. Wenn umgekehrt $\mathrm{Graph}(f)$ zusammenhängt, ist X als sein Bild unter der stetigen Projektion p auch ausammenhängend. □

Example 2. *Die Abbildung* $f\colon (1,2) \cup (3,4) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (1,2) \\ 1 & x \in (3,4) \end{cases}$$

ist stetig. Ihr Graph, die Menge $\{(x,-1) \mid 1 < x < 2\} \cup \{(x,1) \mid 3 < x < 4\}$ *ist ganz klar nicht zusammenhängend.*

Satz 5 gilt allgemein für beliebige topologische Räume X, Y.

Korollar 1 (Zwischenwertsatz). $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.* $a, b \in I$, $a \neq b$ *und* $f(a) < f(b)$. *Dann gibt es* $\forall y$ *mit* $f(a) < y < f(b)$ *ein* $x \in I$ *mit* $f(x) = y$.

Proof. I ist ein Intervall, also zusammenhängend. Daher ist $\mathrm{im}(f)$ zusammenhängend, also ein Intervall. Da $f(a)$ und $f(b)$ zu diesem Intervall $\mathrm{im}(f)$ gehören, tut das jedes y zwischen ihnen auch. □

10 Limes

Definition 4. *Es seien* X, Y *metrische Räume,* $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ *ein Häufungspunkt von* A *und* $f\colon A \longrightarrow Y$. *Wir sagen, ein Punkt* $\alpha \in Y$ *ist ein Limes von* $f(x)$ *für* x *gegen* x_0,

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x), \tag{4}$$

wenn die Funktion $f^{x_0/\alpha}\colon A \cup \{x_0\} \longrightarrow Y$ *definiert durch*

$$f^{x_0/\alpha}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \setminus \{x_0\} \\ \alpha & x = x_0 \end{cases}$$

stetig an der Stelle x_0 *ist.*

Die Definition ist so formuliert, daß x_0 in A sein darf, aber nicht sein muß. Die Schreibweise in (4) suggeriert Eindeutigkeit.

Lemma 1. *Es seien* X, Y, A, x_0, f *wie in Definition 4. Falls* $\alpha, \beta \in Y$ *beide Limiten von* $f(x)$ *für* x *gegen* x_0 *sind, dann gilt* $\alpha = \beta$.

Proof. Wären die Punkte α, β verschieden, so hätten sie disjunkte Umgebungen V_α von α und V_β von β. Die Stetigkeit von $f^{x_0/\alpha}$ und $f^{x_0/\beta}$ in x_0 liefert dann Umgebungen U_α und U_β von x_0 in $A \cup \{x_0\}$ mit $f^{x_0/\alpha}(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ und $f^{x_0/\beta}(U_\beta) \subseteq V_\beta$. Der Durchschnitt der Umgebungen U_α und U_β ist wieder eine Umgebung U von x_0 in $A \cup \{x_0\}$, ist also Schnitt einer Umgebung W von x_0 in X mit $A \cup \{x_0\}$. Da x_0 Häufungspunkt von A ist, enthält W einen von x_0 verschiedenen Punkt von A, es existiert also ein $a \in W \cap A$ mit $a \neq x_0$. Damit ist $a \in W \cap A \subseteq W \cap (A \cup \{x_0\}) = U = U_\alpha \cap U_\beta$. Es folgt $f^{x_0/\alpha}(a) \in V_\alpha$ und $f^{x_0/\beta}(a) \in V_\beta$. Nun unterscheiden sich $f^{x_0/\alpha}$ und $f^{x_0/\beta}$ nur im Funktionswert von x_0 voneinander, sonst tun sie genau dasselbe. Und a ist eben verschieden von x_0, somit sind $f^{x_0/\alpha}(a)$ und $f^{x_0/\beta}(a)$ identisch. Nun liegt also $f^{x_0/\alpha}(a) = f^{x_0/\beta}(a)$ in V_α und in V_β, und das ist schlecht, denn die beiden waren doch disjunkt. $\square$

Hier war die Voraussetzung 'x_0 Häufungspunkt von A' entscheidend. Verzichtete man in Definition 4 auf den Zusatz 'x_0 Häufungspunkt von A', so wäre (in dem Falle, daß x_0 nicht Häufungspunkt von A) jedes $\alpha \in Y$ ein Limes von f, was sinnlos wäre. Häufig wird eine solcherart selbstverständliche Voraussetzung nicht erwähnt. Indem also irgendwo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ geschrieben steht, ist implizit angenommen, daß x_0 ein Häufungspunkt von $\mathrm{dom}(f)$ ist.

Proposition 5. *X, Y, A, x_0, f wie in Definition 4. Die folgenden sind äquivalent:*

1. *$\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x)$.*
2. *$\forall$ Umgebung V von α in Y $\exists$ Umgebung U von x_0 in X mit*

$$f(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Proof. (1. $\to$ 2.): V Umgebung von α. Weil $f^{x_0/\alpha}$ in x_0 stetig ist, gibt es eine Umgebung W von x_0 in $A \cup \{x_0\}$ mit $f^{x_0/\alpha}(W) \subseteq V$. $W = U \cap (A \cup \{x_0\})$ für eine Umgebung U von x_0 in X. Also ist $f^{x_0/\alpha}(U \cap (A \cup \{x_0\})) \subseteq V$. Dann ist aber auch $f^{x_0/\alpha}(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq V$, und das bedeutet $f(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

(2. $\to$ 1.):

$\square$

Die Abbildung $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ hat einen Limes in $x_0 \in X$, wenn sie in x_0 lokal stetig gemacht werden kann. Im Fall, daß $x_0 \notin A$, bedeutet das, daß es eine in x_0 stetige Fortsetzung von f in die Stelle x_0 gibt - eben $f^{x_0/\alpha}$, wenn $\alpha = \lim_{x \to x_0}$ ist. Falls der Punkt x_0 schon in $\mathrm{dom}(f)$ gelegen war, gibt das nichts Neues.

Proposition 6. *X, Y metrische Räume, $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt von A. Falls $x_0 \in A$, so gilt:*

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \iff f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Da das Limeskonzept eine Reformulierung des Begriffs der lokalen Stetigkeit darstellt, ist es nicht überaschend, daß für beide analoge Sätze gelten.

Satz 6. *Es sei X ein metrischer Raum, $A, B \subseteq X$, $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, $B \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt von $A \cap B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\beta = \lim_{x \to x_0} g(x)$ Dann gilt: $\alpha \pm \beta = \lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x)$. Falls $n = 1$ gilt auch $\alpha\beta = \lim_{x \to x_0} (fg)(x)$. Gilt darüberhinaus $\beta \neq 0$ so ist zusätzlich $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\alpha}{\beta}$.*

Example 3.

1. *$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$;*
2. *$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$;*
3. *$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht;*

Man kann den Inhalt von Satz 6 prägnant so assprechen:

$$\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x),\quad \lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\text{und}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$$

wenn alle auftretenden Konzepte sinnvoll sind. Da das Limeskonzept einen Aspekt des Stetigkeitsbegriffs darstellt, ist der folgende Sachverhalt leicht einzusehen.

Proposition 7. *X,Y,Z metrische Räume, $X\supseteq A\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$, $x_0\in X$ Häufungspunkt von A. Dann gilt:*

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}f(x)\ \wedge\ g\text{ stetig in }\alpha\ \rightarrow\ g(\alpha)=\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x).$$

11 Differenzierbarkeit

Wir betrachten Funktionen, deren Domänen Teilmengen der reellen Zahlengeraden sind. Deren Graphen werden gern in der Ebene $\mathbb{R}^2$ veranschaulicht. Die Stetigkeit solch einer Funktion bedeutet anschaulich, daß ihr Graph keine Unterbrechungen hat oder Sprünge macht, wohl aber darf er Spitzen oder Ecken haben, wie z.B. $|x|$ in $x=0$. Die Differenzierbarkeit bedeutet, daß dieses nicht geschieht. Eine an der Stelle $x\in\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f hat im Punkt $(x,f(x))$ ihres Graphen eine Tangente.

Definition 5. *Es sei $\mathbb{R}\supseteq X\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ und $x\in X$ ein Häufungspunkt von X. Wir nennen f **differenzierbar an der Stelle** x, wenn die Funktion*

$$\Delta\colon A\setminus\{x\}\longrightarrow\mathbb{R},\ y\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

einen Limes für y gegen x hat, wenn also

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ \text{existiert.}$$

Differenzierbarkeit ist - wie die Stetigkeit auch - eine lokale Eigenschaft; eine Funktion kann an der einen Stelle ihrer Domäne differenzierbar sein, an irgendwelchen anderen Stelle vielleicht nicht. f heißt **differenzierbar**, wenn f differenzierbar an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs ist.

Im Falle, daß f in x differenzierbar, hat die Funktion Δ, die im Punkt x nicht definiert ist, eine Fortsetzung in die Stelle x, die in x stetig ist, es existiert

$$\lim_{y\to x}\Delta(y)=\lim_{yt\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Dieser Limes ist eindeutig bestimmt, dafür sorgt die Voraussetzung 'x Häufungspunkt von X', denn daraus folgt, daß x auch einen Häufungspunkt von $X\setminus\{x\}$ - des Definitionsbereichs von Δ - ist. Wir nennen diesen Limes **die Ableitung von f an der Stelle** x, symbolisch $f'(x)$. Ist also f in x differenzierbar, so gilt

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Example 4.

1. *Konstante Funktionen* $\mathbb{R} \supseteq X \xrightarrow{c} \mathbb{R},\ x \mapsto c$ *sind differenzierbar (in allen Häufungspunkten von* X*, die zu* X *gehören).* $\Delta(y) = \frac{c(y)-c(x)}{y-x} = \frac{c-c}{y-x} = 0$, *daher* $\lim_{y\to x} \Delta(y) = 0$.

2. *Inklusion (und Identität):* $\mathbb{R} \supseteq X \xrightarrow{i} \mathbb{R},\ x \mapsto x$. $\Delta(y) = \frac{y-x}{y-x} = 1$, $\lim_{y\to x} \Delta(y) = 1$.

3. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$: $\Delta(y) = \frac{y^2-x^2}{y-x} = y + x$.
$\lim_{y\to x} \Delta(y) = \lim_{y\to x}(y + x) = x + x = 2x$. *Daher* $f'(x) = 2x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $g\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. $\Delta(y) = \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x} = \frac{\frac{x-y}{xy}}{y-x} = \frac{-1}{yx}$. *Daher* $\lim_{y\to x} \Delta(y) = -\frac{1}{x^2}$, *i.e.*, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. *Ist die Funktion* $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \ldots & x \in \mathbb{Q} \\ -x \ldots & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *differenzierbar in* $x = 0$*? Dann müßte* $\lim_{y\to 0} \Delta(y)$ *existieren, also der Limes der Funktion* $\frac{h(y)-h(0)}{y-0} = \frac{h(y)}{y} = \begin{cases} \frac{y}{y} = 1 \ldots\ldots & y \in \mathbb{Q} \\ \frac{-y}{y} = -1 \ldots & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. *Das ist die Dirichletfunktion (eingeschränkt auf* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*), sie hat nirgendwo einen Limes. Antwort: Nein!*

6. *Sei* $k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \ldots x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 \ldots x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. *Existiert* $k'(0)$*?*
$\Delta(y) = \frac{k(y)}{y} = \begin{cases} \frac{y^2}{y} = y \ldots y \in \mathbb{Q} \\ \frac{-y^2}{y} = -y \ldots y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. *Von dieser Funktion kennen wir eine Fortsetzung in die Stelle* 0*, die in* 0 *stetig ist (Ex refStetige Abbildungen/6). Die Antwort lautet: Ja!* $k'(0) = 0$.

Die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle x hat ihre Stetigkeit zur Folge.

Proposition 8. $\mathbb{R} \supseteq X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \in X$ *ein Häufungspunkt von* x*. Ist* f *in* x *differenzierbar, so ist* f *in* x *stetig.*

Proof. □

Die Sätze über die Veträglichkeit von Limes und algebraischen Operationen auf $\mathbb{R}$ schlagen unmittelbar durch:

Satz 7. *Seien* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $x \in X \cap Y$ *ein Häufungspunkt von* $X \cap Y$*. Weiters sei* f *differenzierbar in* x *und* g *differenzierbar in* x*. Dann gilt:*

1. $f \pm g$ *differenzierbar in* x *und* $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

2. fg *differenzierbar in* x *und* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

3. *Falls zusätzlich* $g(x) \neq 0$*, dann ist auch* $\frac{f}{g}$ *differenzierbar in* x *und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Satz 8 (Kettenregel). *Es seien* $\mathbb{R} \supseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \supseteq B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *Funktionen,* $x \in A$ *Häufungspunkt von* A, $y \in B$ *Häufungspunkt von* B, *und* $f(x) = y$. *Ist* f *differenzierbar in* x *und* g *differenzierbar in* y, *so ist* $g \circ f$ *differenzierbar in* x *und* $(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x)$.

Proof. □

Definition 6. *Es sei* X *eine Menge,* $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion. Wir sagen*

- f *nimmt an der Stelle* $x \in X$ *ihr Maximum an, wenn* $f(x) \geq f(y)\ \forall y \in X$;
- f *nimmt an der Stelle* $x \in X$ *ihr Minimum an, wenn* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in X$.

Falls f ihr Maximum in x annimmt, nennt man die Zahl $f(x)$ das **(globale) Maximum von** f, $\max(f) = \max_{y \in X} f(y)$. Die Zahl $\min(f)$ ist analog definiert. $\max(f)$ ($\min(f)$) ist einfach das größte (kleinste) Element von $\mathrm{im}(f)$, und als solches eindeutig bestimmt, fall es existiert. Und man sieht leicht, daß das nicht sein muß; Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben nicht zwingend ein größtes oder kleinstes Element, selbst dann, wenn sie beschränkt sind.

Example 5.

1. $f: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *hat weder max noch min.*
2. $g: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *hat jedenfalls ein Minimum.*

Klarerweise kann eine Funktion f mehrere Stellen x mit $f(x) = \max(f)$ haben. Also: $\max(f)$ ist eindeutig, fall es existiert, der Punkt x, an dem das passiert, nicht immer!

Über beliebige - möglicherweise auch unstetige - Funktionen kann man bezüglich max/min keine Vorhersagen machen. Für stetige Funktionen ist die Existenz von Maximum und Minimum unter zusätzlichen Anforderungen an den Definitionsbereich garantiert[3]. Differenzierbare Funktionen lassen es zu, Genaueres zu sagen, manchmal sogar, Maximum und Minimum zu berechnen (sofern sie existieren).

Definition 7. X *metrischer Raum,* $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. *Wir sagen*

- f hat an der Stelle $x \in X$ ein **lokales** Maximum, wenn es eine Umgebung U von x in X gibt, sodaß $f|_U$ in x ihr Maximum annimmt;
- f *hat an der Stelle* $x \in X$ *ein* ***lokales*** *Minimum, wenn es eine Umgebung* U *von* x *in* X *gibt, sodaß* $f|_U$ *in* x *ihr Minimum annimmt.*

Falls f in x ihr (globales) Maximum (Minimum) annimmt, hat sie dort auch ein lokales Maximum (Minimum); die konverse Aussage ist natürlich falsch.

Um über die dualen Begriffe Maximum-Minimum sprechen zu können, ohne alles doppelt sagen zu müssen, verabredet man das Wort 'Extremum' für 'Maximum oder Minimum' zu verwenden; also, 'f hat in x ein (lokales) Extremum' übersetzt zu 'f hat in x ein (lokales) Minimum oder ein (lokales) Maximum'. Wir zeigen nun, daß lokale Extrema differenzierbarer Funktionen $\mathbb{R} \supseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe der Ableitung erkannt werden können, wenn sie im Inneren des Definitionsbereichs angenommen werden. Wir verwenden eine Eigenschaft stetiger Funktionen:

[3] X kompakter metrischer Raum und $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists \max(f)$ und $\exists \min(f)$.

Lemma 2. *X, Y metrische Räume, $f\colon X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $x \in X$. Dann gilt*

$$x \in \overline{A} \wedge f \text{ stetig in } x \;\Rightarrow\; f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Das kennen wir schon, der entsprechende Sachverhalt für global stetige Abbildungen ist in Satz?? formuliert.

Proof. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$. Weil x Berührungspunkt von A ist, schneidet U die Menge A, $\exists a \in U \cap A$. Dann ist $f(a) \in f(U) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$ und daher $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Jede beliebig vorgegebene Umgebung V von $f(x)$ schneidet somit $f(A)$, i.e., $f(x)$ ist Berührungspunkt von $f(A)$. □

Das Lemma besagt, daß eine lokal stetige Funktion die Eigenschaft des 'Berührens' lokal respektiert[4].

Satz 9. *Es sei x ein innerer Punkt von $X \subseteq \mathbb{R}$, und $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenzierbar in x. Wenn f in x ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x) = 0$.*

Proof. Angenommen, f habe in x ein lokales Maximum. Es gibt also eine Umgebung U von x in X, sodaß $\forall u \in U\ (f(u) \leq f(x))$. Da X eine Umgebung von x in $\mathbb{R}$ ist ($x \in X^\circ$), ist U Umgebung von x in $\mathbb{R}$, daher $\exists \varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Es folgt $f(u) \leq f(x) \forall u \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Die Differenzierbarkeit von f in x bedeutet, daß die Funktion

$$\Delta\colon X \longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & y \in X \setminus \{x\} \\ f'(x) & y = x \end{cases}$$

stetig in x ist. Sei $B = (x-\varepsilon, x)$, und $C = (x, x+\varepsilon)$. $x \in \overline{B} \cap X$, also ist x Berührungspunkt von B in X. Ebenso ist x Berführungspunkt von C in X. Lemma 2 liefert $\Delta(x) \in \overline{\Delta(B)}$ und $\Delta(x) \in \overline{\Delta(C)}$. Für $y \in B$ gilt

$$\Delta(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0,$$

während für $y \in C$

$$\Delta(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

gilt. Also $\Delta(B) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und $\Delta(C) \subseteq \mathbb{R}_0^-$, und daher auch $\overline{\Delta(B)} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und $\overline{\Delta(C)} \subseteq \mathbb{R}_0^-$ (weil $\mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{R}_0^-$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Mengen sind). Es folgt $\Delta(x) \in \mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{R}_0^- = \{0\}$ und so $f'(x) = 0$. Im Falle, daß f in x ein lokales Minimum hat, geht der Beweis analog. □

12 Folgen

Definition 8. *Es bezeichne X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Example 6. *Die folgenden sind alles Folgen:*

[4] 'Berühren' im Sinn von 'Berührungspunkt sein'

1. $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$,
2. $b\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$,
3. $c\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{2^n}$,
4. $d\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(n) = (-1)^n(1+\frac{1}{n})^n$

Das, was eine Folge unter beliebigen Abbildungen auszeichnet, ist der Definitionsbereich. Ist dieser gleich $\mathbb{N}$, so ist es eine Folge.[5] Bei Folgen hat sich die Indexschreibweise eingebürgert; die Folge aus Ex 6.2 schreibt sich dann $b_n = \frac{1}{n}$. Das ist nicht verpflichtend, man darf auch $b(n) = \frac{1}{n}$ schreiben.

Die Folgen in Ex 6 sind alle explizit gegeben, man kann das 10000-ste Folgenglied (den Funktionswert f_{10000} [oder $f(10000)$], wenn f die Folge bezeichne) mühelos anschreiben, einfach durch Einsetzen in den 'allgemeinen Term' $f(n)$. Dem gegenüber steht die **rekursive Darstellung** einer Folge:

Example 7. *Was jetzt kommt, definiert auch jeweils eine Folge:*

1. $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n - 4$;
2. $a_0 = 1$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

Das 10000-te Folgenglied ist nicht sofort ersichtlich, man muß erst a_{9999} kennen, um es berechnen zu können. Und daür a_{9998} und so weiter, bei Ex 7.1 also

$$a_{10000} = 3a_{9999} - 4 = 3(3a_{9998} - 4) - 4 = 3\big(3(3a_{9997} - 4) - 4\big) - 4 = \cdots.$$

Man muß also zurückschreiten bis zum Anfangstwert a_0 und den so entstandenen Ausdruck dann auswerten. Rekursiv. Die nächste Folge ist auch rekursiv dargestellt

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ (n > 0),$$

wird Fibonacci-Folge genannt und hat zwei Anfangswerte der Rekursion.

Gleich ob rekursiv gegeben oder explizit, eine Folge ist eine Abbildung, 'rekursiv' und 'explizit' sind Eigenschaften ihrer Darstellung.[6]

Da Folgen spezielle Abbildungen sind, finden alle einschlägigen Begriffe Anwendung; z.B. nennt man eine Folge $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$ in dem metrischen Raum X **beschränkt**, wenn $\mathrm{im}(x)$ beschränkt ist, d.h., wenn $\sup_{k,l} d(x_k, x_l) < \infty$. Eine reelle Folge $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend**, wenn $x_n \leq x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. x heißt **streng monoton wachsend**, wenn $x_n < x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Die Bedeutung von 'Monoton fallend' und 'streng monoton fallend' ist dann auch klar. **(Streng) monoton** heißt eine reelle Folge (also eine Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$) dann, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist. Auch das Limeskonzept ist sinnvoll anwendbar, wenn man die natürlichen Zahlen als Teilraum einer geeigneten Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ betrachtet (siehe Übungen). Die folgennde Definition faßt das Wesentliche dieser Konstruktion.

[5] Ganz so strikt wird das nicht gehandhabt. Man wird Z.B. auch eine Abbildung $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 4\} \longrightarrow X$ eine Folge nennen, allgemein auch Abbildungen $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\} \longrightarrow X$, wo $k \in \mathbb{Z}$ fest gegeben ist. Es gibt sogar 'endliche Folgen', das sind Abbildungen, die auf einem endlichen Abschnitt ganzer Zahlen definiert sind, es ist z.B., $a\colon \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = \sqrt{n+3}$ eine endliche Folge.

[6] Beide haben ihre Vorteile; abhängig vom Problem, das es zu lösen gilt, kann es vorteilhaft sein, die eine in die andere umzurechnen.

Definition 9. *X ein metrischer Raum, $a: \mathbb{N} \longrightarrow X$ eine Folge in X, $\alpha \in X$. Wir sagen a* konvergiert gegen *α wenn es zu jeder Umgebung U von α einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $\forall n \geq N\ a_n \in U$.*

Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} = \alpha$ wenn a gegen α konvergiert. Der Limes einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt. In Calculus-Büchern häufig verwendeter Slang: man sagt '**fast alle**' und meint: 'alle bis auf (höchstens) endlich viele'!

Proposition 9. *$a: \mathbb{N} \longrightarrow X$, $\alpha \in X$. Die folgenden sind äquivqlent:*

1. $\lim_{n\to\infty} = \alpha$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N\ d(a_n, \alpha) < \varepsilon$;
3. *in jeder Umgebung von α liegen fast alle Folgenglieder.*

Example 8 (Reelle Folgen).

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. $x \in (-1, 1) \ \rightarrow\ \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
3. *Sei $x \in (-1, 1)$ und $a_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Dann ist*
$$a_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
Daher gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-x}$.

Die Eigenschaft 'Berührungspunkt sein' sowohl als auch lokale Stetigkeit können in der Sprache der Folgen charakterisiert werden.

Proposition 10. *X, Y metrische Räume, $X \xrightarrow{f} Y$, $x \in X \supseteq A$. Es gilt:*

1. $x \in \overline{A} \iff \exists$ *Folge* $\mathbb{N} \xrightarrow{a} A$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.
2. *f stetig in x* $\iff \forall a: \mathbb{N} \longrightarrow X\ (\lim_{n\to\infty} a_n = x \rightarrow \lim_{n\to\infty} (f \circ a)_n = f(x))$.

Proposition 11.

1. *Wenn eine Folge konvergiert, so ist sie beschränkt.*
2. *Ist $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton und bschränkt, so ist x konvergent.*

Die Konvergenz einer Folge $x: \mathbb{N} \longrightarrow X$ gegen einen (dann eindeutig bestimmten) Grenzwert α bedeutet, daß in jeder Umgebung U von α unendlich viele Folgenglieder, außerhalb aber nur endlich viele liegen; in jeder Umgebungung von α liegen fast alle Folgenglieder. Man muß aufpassen. Die Phrase 'in U liegen unendlich viele Folgenglieder' bedeutet nicht, daß $U \cap \mathrm{im}(x)$ eine unendliche Menge ist[7], ihre präzise Dedeutung ist vielmehr, daß die Menge aller Indizes, deren Bilder in U liegen unendlich ist, daß also $\{k \mid x_k \in U\}$ eine unendliche Menge ist. Desgleichen bedeutet 'fast alle Folgenglieder von x sind in U', daß $\{k \mid x_k \in U\}$ unendlich, während $\{k \mid x_k \notin U\}$ endlich ist.

[7]Das Image der konstanten Folge $\mathbb{N} \longrightarrow X$, $n \mapsto x_0 \in X$ hat überhaupt nur ein Element, trotzdem konvergiert diese Folge gegen x_0.

Definition 10. *X metrisch, $x \longrightarrow X$ eine Folge. Ein $\alpha \in X$ heißt* ***Häufungswert von*** *x, wenn in jeder Umgebung von α unendlich viele Folgenglieder liegen.*[8] *Wir schreiben 'α ist HW' für 'α ist ein Häufungswert'.*

Von der Formulierung dieser Definition ist unmittelbar, daß $\lim_{n\to\infty} x_n$ eine Häufungswert ist, sofern es den Limes gibt. Ein Häufungswert kann, muß aber nicht Limes sein. Während der Limes - so es ihn gibt - eindeutig bestimmt ist, kann eine Folge viele Häufungswerte haben, manche besitzen unendlich viele davon (siehe Übungen). Falls $\lim_{n\to\infty} x_n$ existiert, ist das der einzige Häufungwswert.

Example 9.

1. *$(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist konvergent, daher ist $\lim_{n\to\infty} = 0$ der einzige Häufungswert.*
2. *$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat gar keinen Häufungswert.*
3. *$x_n = (-1)^n(+\frac{1}{n})$ hat genau zwei Häufungswerte: ± 1.*

Äquivalente Formulierung: α ist HW von $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X \iff$ in jeder Umgebung von α liegen Folgenglieder mit beliebig großem Index;

$$\alpha \text{ HW von } x \;\leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \forall N \in \mathbb{N}\; \exists n \geq N \text{ mit } d(x_n\alpha) < \varepsilon.$$

Eine beschränkte reelle Folge hat jedenfalls immere einen Häufungswert.

Satz 10. *[Bolzano-Weiertraß] Sei $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat x einen Häufungswert.*

Proof. Weil x beschränkt ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, sodaß $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow [a, b]$. Es bezeichne c die Folge $c_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Es gilt $a \leq c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq b$, c ist also monoton wachsend und beschränkt, daher (Prop. 11) gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \sup_n c_n =: \alpha.$$

Dieses α ist ein Häufungswert von x: Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Da α die kleinste obere Schranke der c_n ist, kann $\alpha - \varepsilon$ nicht mehr obere Schranke aller c_n sein; nicht alle c_n sind damit $\leq \alpha - \varepsilon$. $\exists k$ mit $c_k > \alpha - \varepsilon$ und da c monoton wächst, gibt es so ein k mit $k \geq N$. Nun ist c_k das Infimum aller x_n für die $n \geq k$ gilt. Gleiches Argument: $c_k + \varepsilon$ kann nicht mehr untere Schranke all dieser x_n sein, es gibt also ein $n \geq k$ mit $x_n < c_k + \varepsilon$. Dieses n ist $\geq N$ und

$$\alpha - \varepsilon < c_k \leq x_n < c_k + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon.$$

Damit $\exists n \geq N$ mit $x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. □

Definition 11. *Es sei $\mathbb{N} \xrightarrow{a} X$ eine Folge im metrischen Raum (X, d). a heißt* ***Cauchy-Folge****, wenn*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l \geq N \;\; d(a_k, a_l) < \varepsilon.$$

Proposition 12. *X metrisch, $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$. Es gilt:*

$$x \text{ konvergent } \;\rightarrow\; x \text{ Cauchy } \;\rightarrow\; x \text{ beschraenkt.}$$

[8] Bitte nicht 'Häufungswert einer Folge' mit 'Häufungspunkt einer Menge' verwechseln!

Proof. □

Jede konvergente Folge ist also Cauchy. Die Umkehrung gilt nicht.

Example 10. *Die Folge* $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ *ist Cauchy, aber nicht konvergent.*

Definition 12. *Ein metrischer Raum* X *heißt* ***vollständig****, wenn jede Cauchyfolge in* X *konvergiert.*

$\mathbb{Q}$ (als Teilraum von $\mathbb{R}$) ist also nicht vollständig, er hat "Löcher".

Satz 11. $\mathbb{R}$ *ist vollständiger metrischer Raum.*

Proof. Sei $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-Folge. Wir zeigen, daß x konvergiert. Nach Proposition 12 ist x beschränkt, also gibt es einen HW α (nach Bolzano-Weierstraß). Es ist $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$: Zu $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall k, l \geq N$ $(|x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2})$ (weil x Cauchy). Weil α HW, $\exists l \geq N$ mit $|x_l - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für beliebiges $k \geq N$ ist jetzt

$$|x_k - \alpha| \leq |x_k - x_l| + |x_l - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

13 Zentrale Sätze

Satz 12. $\mathbb{R}^n$ *ist vollständiger metrischer Raum* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 13 (Satz von Min/Max). $a < b$. *Jede stetige Funktion* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

Das bedeutet, $\exists \mathrm{Max}(f) = \max_{a\leq x\leq b} f(x)$ und $\exists \mathrm{Min}(f) = \min_{a\leq x\leq b} f(x)$.

Korollar 2. $a < b$, $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *stetig* $\Rightarrow \exists c \leq d$ *mit* $\mathrm{im}(f) = [c,d]$.

So eine Mischung aus Zwischenwertsatz und Max/Min. Das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls ist ein abgeschlossenes Intervall.

Lemma 3 (Satz von Rolle). $a < b$. $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar in* (a,b) *so, daß* $f(a) = f(b)$. *Dann* $\exists x \in (a,b)$ *mit* $f'(x) = 0$.

Satz 14 (Mittelwertsatz). $a < b$. $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar in* (a,b). *Dann* $\exists \Theta \in (a,b)$ *mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\Theta)(b-a).$$

Proof. Die Funktion $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Daher $\exists \Theta \in (a,b)$ mit $F'(\Theta) = 0$. Das heißt dann

$$0 = f'(\Theta) = f'(\Theta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Korollar 3.

14 Reihen

Eine Folge in einem Vektorraum gibt Anlaß zu einer weiteren Folge:

Definition 13. *$\mathbb{N} \xrightarrow{a} E$, wo E ein normierter Vektorraum. Die zu a gehörige Reihe ist*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Wir schreiben $\sum a$ für die Reihe zur Folge a; also:

$$\left(\sum a\right)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Folgenglieder a_k, die Summanden der Reihe, heißen in diesem Zusammenhang ihre **Terme**.

Example 11. *Die Reihe zu $a_n = n$ ist $(\sum a)_n = s_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Zu $b_n = \frac{1}{n}$ ist die Reihe $(\sum b)_n = s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.*

Eine Reihe ist auch nur eine Folge, kann also z.B. konvergieren.

Definition 14. *E normierter Raum, $\mathbb{N} \xrightarrow{a} E$. Falls die Reihe $\sum a$ gegen $\alpha \in E$ konvergiert schreiben wir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$. Man sagt dann, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, oder die Reihe $\sum a$ konvergiert.*

Example 12. *Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n = x^n$. Die Reihe $\sum a$ heißt **geometrische Reihe**. Es gilt $(\sum a)_n = \sum_{x=0}^{n} x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Falls $x \in (-1, 1)$, ist $\sum a$ konvergent, und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (vergleiche Ex 8/3).*

Die Reihe zu einer Folge a ist rekursiv gegeben: $s_0 = a_0$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Deshalb ist es i.a. müsamer, das Konvergenzverhalten einer Reihe (das heiß, ob sie konvergiert, oder nicht) rauszukriegen, als das ihrer sie definierenden Folge.[9] Jedenfalls, es kann schon Arbeit bedeuten, das Konvergenz*verhalten* einer Reihe $\sum a$ zu analysieren, ihren tatsächlichen Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zu lokalisieren ist meist noch schwieriger.

Wie erkennt man jetzt also, ob eine Reihe konvergiert? Wie ist es z.B. mit $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$? Oder konvergiert vielleicht $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$? Es gibt ein paar Resultate.

Proposition 13 (Geomerische Reihe).

$$x \in (-1, 1) \;\rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Lemma 4. *Es sei E ein normierter Vektoraum, $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$ eine Folge, $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ die zugeörige Reihe. Dann gilt*

$$s \text{ Cauchy} \;\leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k, l \in \mathbb{N} \; \left(N \le k \le l \rightarrow \left\| \sum_{i=k}^{l} a_i \right\| < \varepsilon \right).$$

[9] Sofern so eine Aussage Sinn machen kann: Jede Folge ist selbst Reihe, also $\forall x \in X^{\mathbb{N}} \; \exists a \in X^{\mathbb{N}}$ mit $\sum a = x$. Kann man sich leicht überlegen.

Das ist das **Cauchy-Kriterium** für Reihen. In normierten Räumen, die als metrische Räume vollständig sind -sogenannte **Banachräume** - ist es ein Konvergenzkriterium.[10]

Korollar 4. *E normierter Raum, $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$, $s = \sum a$ die Reihe. Wenn $\sum a$ Cauchy ist, gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proof. $\varepsilon > 0$. $\exists N\ \forall k, l\ (N \leq k \leq l \rightarrow ||\sum_{i=k}^{l} a_i|| < \varepsilon)$. Falls $k \geq N$, folgt $N \leq k \leq k$, daher $||\sum_{i=k}^{k} a_i|| < \varepsilon$, also $||a_k - 0|| < \varepsilon$. Für alle $k \geq N$ ist $a_k \in K_\varepsilon(0)$, d.h., $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Das ist simpel, aber dennoch stark. Wenn eine Folge a nicht gegen 0 konvergiert, brauchen wir gar nicht erst nach $\sum_{n=0}^{\infty}$ zu suchen.

Definition 15. *Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt* ***Banachraum****.*

Satz 15. $\mathbb{R}^n$ *ist Banachraum* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Das ist genau Satz 12.

Satz 16. $a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. *Es gilt*

$$\sum a \text{ kovergent } \leftrightarrow \sum a \text{ beschraenkt.}$$

Proof. Da a nur positive Glieder hat, ist $\sum a$ monoton wachsend. Alles folgt aus Proposition 11. □

Example 13. *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Man schreibt $0! := 1$*;* $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$. *Wieder eine rekursive Folge:*

$$0! = 1, \quad (n+1)! = n!(n+1).$$

(5) sagt: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{n!} < 3$. *Sei* $a_n = \frac{1}{n!}$. *Dann ist* $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *und (5) bedeute, daß* $\sum a$ *beschränkt ist. Insgesamt existiert* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}(\sum a)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$. *Man nennt diese zahle die* ***Eulersche Zahl*** e*. Also*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Eine Folge a in einem Banachraum E erzeugt eine weitere Folge $n \mapsto ||a_n||$, eine reelle Folge mit poitiven Gliedern. Dadurch haben wir jetzt auch zwei Reihen: $\sum a$ in E und $\sum ||a||$ in $\mathbb{R}$.

Definition 16. *E Banchraum, $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$. Man nennt die Reihe $\sum a$* ***absolut konvergent****, wenn* $\sum ||a||$ *konvergiert.*

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

[10] Insbesondere ist Lemma 4 ein Konvergenzkriterium für $E = \mathbb{R}$.

Satz 17. *E Banachraum, $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow E$. Dann gilt*

$$\sum ||a|| \text{ konvergent } \rightarrow \sum a \text{ konvergent } \wedge \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty}\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||.$$

Satz 17 unterstreicht die Bedeutung von reellen Reihen mit positiven Termen.

Satz 18 (Majorantenkriterium). *Es seien a, b reelle Folgen. Falls $\exists N\ \forall k \geq N\ (|a_k| \leq b_k)$ und $\sum b$ konvergiert, dann konvergiert $\sum a$.*

Man nennt so eine Reihe $\sum b$ eine **Majorante** für (von?) $\sum a$.

Satz 19 (Quotientenkriterium). $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\exists \Theta \left(0 < \Theta < 1 \wedge \exists N \forall n \geq N \big(a_n \neq 0 \wedge |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \Theta\big)\right) \Rightarrow \exists \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Wie schon beim Majorantenkriterium (Satz **??** ist die Conclusio die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a$.

Example 14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *konvergiert.* $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1\ \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Satz 19 greift mit $\Theta = \frac{8}{9}$.

Satz 20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$.*

15

Es sei $\sum_a$ eine konvergente Reihe. Schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

so definiert das eine Reihe $r_{N+1} = \sum_{n \geq N+1} a_n$ welche gegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - (a_0 + \cdots + a_N)$$

konvergiert, wir haben also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \cdots + a_N + r_{N+1}.$$

Die Reihe r_{N+1} heißt das n**-te Restglied** der Reihe $\sum a$ oder ihr n-ter Reihenrest. Der Reihenrest der Exponetialfunktion ist natürlich von x abhängig,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + r_{N+1}(x). \tag{6}$$

Lemma 5. *[Restgliedabschätzung] Für das Restglied (6) gilt* $\forall N \in \mathbb{N}$

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

Proof.

$$|r_{N+1}(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} =$$

$$= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \cdots + \frac{|x|^k}{(N+2)(N+3)\cdots(N+k+1)} + \cdots \right)$$

Für den allgemeinen Term der letzten Reihe gilt

$$\frac{|x|^k}{(N+2)(N+3)\cdots(N+k+1)} \leq \frac{|x|^k}{(N+2)^k} = \left(\frac{|x|}{N+2} \right)^k.$$

Wenn x nahe genug bei 0 ist, können wir eine geometrische Reihe zum Majorisieren verwenden. Falls also $|x| \leq \frac{N+2}{2} = 1 + \frac{N}{2}$, so gilt $\left(\frac{|x|}{N+2} \right)^k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k$ und daher

$$\frac{|x|^k}{(N+2)(N+3)\cdots(N+k+1)} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k \quad \forall k \quad \text{d.h.,}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(N+2)(N+3)\cdots(N+k+1)} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

und es folgt

$$|r_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

□

Satz 21. $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *ist stetig.*

Proof. Wir zeigen zuerst, daß exp stetig in 0 ist:

Sei $\varepsilon > 0$, wir müssen ein $\delta > 0$ finden, sodaß $|x - 0| < \delta$ zur Folge hat, daß $|e^x - e^0| < \varepsilon$. Nun ist $e^x - e^0 = e^x - 1 = r_1$ genau der 1. Reihenrest von e^x, und Lemma **??** liefert die Abschätzung

$$|e^x - e^0| = |r_{0+1}| \leq 2\frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x|$$

und das für $|x| \leq 1$. Indem wir - bei vorgegebenem ε - für $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ setzen, folgt aus $|x| < \delta$ sofort $|x - 1| < \varepsilon$. exp ist also mal stetig in 0.

Um die Stetigkeit in einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$ nachzuweisen verwenden wir die Funktionalgleichung (**??**). Wir definieren zwei lineare Funktionen

$$l\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto t - x \quad \text{und} \quad m\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{e^x}t.$$

□

16 Integration

Definition 17. *Unter einer Partition eines Intervalls* $[a, b]$ *verstehen wir eine endliche Zerlegung*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{7}$$

Eine zweite Partition $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{l-1} < y_l = b$ *heißt* ***Verfeinerung*** *von (7) wenn jedes* x_k *in der Liste der* y_j *vorkommt.*

Definition 18. *Eine Funktion* $s\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* ***Treppenfunktion****, wenn es eine Partition* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *von* $[a, b]$ *gibt, sodaß* s *auf jedem offenen Teilintervall* (x_{k-1}, x_k) *(für* $k = 1, \ldots, n$*) konstant ist. Mit* $T[a, b]$ *bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf* $[a, b]$*.*

Über die Funktionswerte in den Randpunkten der Teilintervalle wird nichts verlangt. Die Partition auf deren offenen Teilintervallen s konstant ist, ist nicht eindeutig. Wenn $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ so eine Zerlegung für s ist, so gilt das auch für jede Verfeinerung. Natürlich gibt es immer eine eindeutig bestimmte gröbste (minimale) Partition für s. Auf dem Intervall $[1, 3]$ ist z.B.

$$\{1, 8\} \cup \{(x, 2/3) \mid 1 < x < 1.5\} \cup \{(1.5, -6)\} \cup \{(x, 3) \mid 1.5 < x < 2\}$$
$$\cup \{(x, -2) \mid 2 \le x < 3\} \cup \{3, 11\}$$

der Graph einer Treppenfunktion mit minimaler Zerlegung $1 < 1.5 < 2 < 3$. Auch die konstanten Funktionen auf $[a, b]$ sind Beispiele für Treppenfunktionen.

Satz 22. $T[a, b]$ *ist ein reeller Vektorraum bezüglich der punktweisen Operationen*

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) \text{ und } (\lambda s)(x) = \lambda s(x) \qquad (s, t \in T[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Proof. $T[a, b]$ ist eine Teilmenge der Menge $\mathbb{R}^{[a,b]}$ aller Funtionen auf $[a, b]$, welche einen reellen Vektorraum mit diesen Operationen bildet. Es sind also nicht etwa die Vektorraumeigenschaften nachzurechnen, sondern nur, daß die punktweisen Operationen auf $\mathbb{R}^{[a,b]}$ nicht aus dem Bereich $T[a, b]$ hinausführen. Die konstante Funktionen $0\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist jedenfalls in $T[a, b]$. Falls $s \in T[a, b]$, so ist λs Treppenfunktion mit der gleichen Partition. Sind nun $s, t \in T[a, b]$ vermmöge der Partitionen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{l-1} < y_l = b$, so sind sie das auch bezüglich einer gemeinsamen Verfeinerung $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{p-1} < z_p = b$. Auf jedem Teilintervall (z_{k-1}, z_k) ist dann sowohl s als auch t konstant. Folglich ist auch $s + t$ auf den (z_{k-1}, z_k) konstant, i.e., $s + t \in T[a.b]$. $\square$

Für Treppenfunktionen wird das Integral als 'orientierter Fl"acheninhalt unter dem Graphen' definiert.

Definition 19. *Sei* $s\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion, und* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b]$ *eine Zerlegung, sodaß* s *auf den Teilintervallen* (x_{k-1,x_k}) *den konstanten Wert* c_k *hat. Das* ***Integral*** *von* s *ist*

$$I(s) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k. \tag{8}$$

Das Integral $I(s)$ ist eine reelle Zahl, die der Treppenfunktion durch die Abbildung I zugeordnet wird.

Satz 23. *Die Abbildung $I\colon T[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein monotones lineares Funktional; das bedeutet*

$$I(s+t) = I(s) + I(t),\ I(\lambda s) = \lambda I(s),\ s \leq t \ \rightarrow\ I(s) \leq I(t).$$

Dabei steht $s \leq t$ für $\forall x \in [a,b]\ (s(x) \leq t(x))$.

Das Primärziel der Integrationstheorie ist es, das Konzept 'Integral' auf eine möglichst große Funktionenklasse zu erweitern. Man sucht also nach einer Abbildung, welche die Funktion $I\colon T[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ so auf einen Vektorraum L mit $T[a,b] \subset L \subseteq \mathbb{R}$ fortsetzt, daß die Eigenschaften 'Linearität' und 'Monotonie' gelten. Beim klassischen Zugang konstruiert man einen Teilvektorraum der beschränkten Funtionen, die **Riemann-integrierbaren**. Wir schreiben $B[a,b]$ für den Vektorraum der beschränkten Funktionen $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 20. *Es sei $f \in B[a,b]$ (also eine beschränkte Funktion), $s\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. s heißt textbfuntere (obere) Treppenfunktion für f, falls $s \leq f$ $(f \leq s)$.*

Eine beschränkte Funktion hat immere eine untere und ein obere Treppenfunktion, z.B. die konstanten Funktionen $Min(f)$ und $Max(f)$, Und damit hat f dann sehr viele. Nun hat jede solche Treppenfunktion ein Integral. Da die Funktion I monoton ist, gilt:

$$\forall s,t \in T[a,b]\ (s \leq f \leq t \ \rightarrow\ I(s) \leq I(t)).$$

Die Mengen $U(f) = \{I(s) \mid s \in T[a,b] \wedge s \leq f\}$ und $O(f) = \{I(t) \mid t \in T[a,b] \wedge f \leq t\}$ sind zwei Mengen reeller Zahlen, die einander gegenseitig beschränken, gemeint ist, jedes $I(t) \in O(f)$ ist eine obere Schranke von $U(f)$, und daraus folgt

$$\sup U(f) \leq \in (O(f)).$$

Definition 21. $f \in B[a,b]$. *Wir setzen*

$$\int_\star f = \sup U(f), \quad \int^\star f = \inf O(f)$$

*und nennen die erste Zahl das **Unterintegral**, die zweite das **Oberintegral** von f.*

Satz 24 (Eigenschaften von Unter/Oberintegral). $f,g \in B[a,b]$. *Es gilt*

1. $\int_\star f \leq \int^\star f$;
2. $\int_\star (f+g) \geq \int_\star f + \int_\star g \qquad \int_\star \lambda f = \lambda \int_\star f\ (\lambda \in \mathbb{R}_0^+)$;
3. $\int^\star (f+g) \leq \int^\star f + \int^\star g \qquad \int^\star \lambda f = \lambda \int^\star f\ (\lambda \in \mathbb{R}_0^+)$.

Für die Dirichletfunktion auf z.B. dem Intervall $[1,3]$

$$D\colon [1,3] \longrightarrow \mathbb{R},\ X \mapsto \begin{cases} 1 & \ldots\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \ldots\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gilt

$$\int_\star D = 0, \quad \int^\star D = 2.$$

Definition 22. *$f \in B[a,b]$ heißt **Riemann-integrierbar**[11], wenn $\int_\star f = \int^\star f$. Diesenrgemeinsamen Wert heißt das **Riemann-Integral** von f, bezeichnet mit $\int f$, oder $\int_a^b f$.*

Falls f R-integrierbar, gilt also $\int f = \int_\star f = \int^\star f$. Die Dirichletfunktion ist schon mal nicht R-integrierbar. Es ist jetzt nachzuweisen, daß die Menge aller R-integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet, der $T[a,b]$ echt unfaßt.[12] Dann noch, daß die Zuordnung $f \mapsto \int f$ linear und monoton ist und die Abbildung I fortsetzt.

Satz 25.

1. *Jede Treppenfunktion $s \in T[a,b]$ ist R-integrierbar, und es gilt $\int f = I(f)$.*
2. *$f, g \in B[a,b]$. Falls f und g R-integrierbar, dann auch $f+g$ und $\int(f+g) = \int f + \int g$.*
3. *$f \in B[a,b]$ R-integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ R-interierbar, und $\int(\lambda f) = \lambda \int f$.*

Dieser letzte Satz ist von großem Wert, er rechtfertigt, die Berechnung komplizierter Integrale auf die Auswertung einfacherer zu reduzieren und wird in der Paxis ohne Erwähnung permanent benutzt.
Wie kann man nun feststellen, ob eine Funktion f ein Integral hat, also R-integrierbar ist, und in diesem Fall $\int f$ berechnen?

Der folgende Mittelwertsatz gibt eine Abschätzung des Werts des Integrals einer stetigen Funktion.

Satz 26 (Mittelwert der Integralrechung). *Es sei $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ (also stetig auf $[a,b]$). Dann gibt es eine Zahl $\zeta \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f = f(\zeta).$$

Proof. f hat Minimum m und Maximum M, es ist also $[a,b] \xrightarrow{f} [m,M]$ surjektiv, und $m \leq f \leq M$. Daher gilt

$$(b-a)m - \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = (b-a)M.$$

Indem wir auf allen drei Seiten dieser Ungleichung durch $b-a$ dividieren, folgt

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M.$$

Der Zwischenwertsatz

□

Definition 23. *Es seinen X, Y Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt*

1. **monoton wachsend** *wenn $\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;*

[11] wir schreiben ‘R-integrierbar’

[12] Wir wollen natürlich, daß es R-integrierbare Funktionen gibt, die keine Treppenfunktionen sind.

2. **monoton fallend** *wenn* $\forall x_1, x_2 \in X(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$;

3. **streng monoton wachsend** *wenn* $\forall x_1, x_2 \in X(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;

4. **streng monoton fallend** *wenn* $\forall x_1, x_2 \in X(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Weiters sagen wir, die Funktion f sei **(streng) monoton** *wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Offensichtlich ist jede streng monotone Funktion injektiv.

$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ definiert einen streng monoton wachsenden Homöomorphismus f: $\varphi\colon \mathbb{R} \cong (-1, 1)$.

Inverse Funktion $f^{-1}\colon (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$

Wir erweitern $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme zweier neuer Objekte $\pm\infty$.

Definition 24. *Die* **erweiterte reelle Zahlengerade** *ist*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Die algebraischen Operationen werden partiell auf $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$$

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$\infty\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty \textit{ und } (-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$$

$$x > 0 \Rightarrow x\infty = \infty x = \infty \textit{ und } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$$

$$x < 0 \Rightarrow x\infty = \infty x = -\infty \textit{ und } x(-\infty) = (-\infty)x = \infty$$

$$-(\infty) = -\infty,\ -(-\infty) = \infty$$

$$\tfrac{x}{\infty} = \tfrac{x}{-\infty} = 0$$

Andere die Symbole $\pm\infty$ enthaltende Gleichungen gibt es nicht, z.B. sind die Ausdrücke $-\infty + \infty$ und 0∞ nicht erklärt.
Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ wrd erweitert zu

$$-\infty < x < \infty \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Zuordnung $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ definiert einen streng monoton wachsenden Homöomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R} \cong (-1, 1)$. φ wird erweitert zu einer Bijektion $\hat{\varphi}\colon \overline{\mathbb{R}} \leftrightarrow [-1, 1]$ durch

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \\ -1 & x = -\infty \\ 1 & x = \infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ erhält so die metrische Struktur des abgeschlossenen Intervalls $[-1, 1]$.

Die algebraischen Operationen werden partiell auf $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$$

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$\infty\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty \text{ und } (-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$$

$x > 0 \Rightarrow x\infty = \infty x = \infty$ und $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$

$x < 0 \Rightarrow x\infty = \infty x = -\infty$ und $x(-\infty) = (-\infty)x = \infty$

$-(\infty) = -\infty,\ -(-\infty) = \infty$

$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$

Andere die Symbole $\pm\infty$ enthaltende Gleichungen gibt es nicht, z.B. sind die Ausdrücke $-\infty + \infty$ und 0∞ nicht erklärt.
Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ wrd erweitert zu

$$-\infty < x < \infty \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Zuordnung $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ definiert einen streng monoton wachsenden Homöomorphismus $\varphi \colon \mathbb{R} \cong (-1, 1)$. φ wird erweitert zu einer Bijektion $\hat{\varphi} \colon \overline{\mathbb{R}} \leftrightarrow [-1, 1]$ durch

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \\ -1 & x = -\infty \\ \ 1 & x = \infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ erhält so die metrische Struktur des abgeschlossenen Intervalls $[-1, 1]$.