1 Einleitung

Die Analysis ist die Theorie der reellen und komplexen Abbildungen und Funktionen, ihrer Darstellung, ihrer Eigenschaften und Beziehungen zueinander. Die der Analysis zugrunde liegenden Objekte sind reelle Zahlen. Eine **positive reelle Zahl** wird dargestellt als eine Folge von Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ mit einem Dezimalpunkt (ein **Dezimalbruch**). Wir unterscheiden zwischen abbrechenden Dezimalbrüchen wie 23.495 oder 0.001 und nichtabbrechenden Dezimalbrüchen wie

$$3.1415926535897932385\ldots$$

Die Punkte sollen andeuten, daß die Dezimalbruchdarstellung dieser Zahl nicht abbricht (wenngleich hier nicht klar ist, wie es weiter gehen soll). Unter den reellen Zahlen, deren Darstellung nicht abbricht, gibt es die **periodischen** wie

$$32.159768768768768\ldots$$

Wieder sollen die Punkte andeuten, daß es immer so weiter geht, und hier wissen wir wie. Wir schreiben $32.159\overline{768}$ für diese reelle Zahl mit periodischer Dezimalbruchentwicklung. Natürlich verwenden wir die bekannten Kurzschreibweisen. Wir lassen führende oder abschließende Nullen weg wie in $00035.1230000 = 35.123$ und schreiben 48 anstatt 48.000, i.e., wir unterdrücken den Dezimalpunkt bei ganzen Zahlen. **Negative reelle Zahlen** entstehen aus positiven durch Voranstellen eines Minus-Zeichens, eine **reelle Zahl** ist entweder eine positive oder eine negative reelle Zahl oder 0.

Rationale Zahlen sind solche reelle Zahlen, deren Dazimalbruchentwicklung abbricht, oder aber periodisch ist. Die, deren Darstellung weder abbricht noch periodisch ist, heißen irrational. In dieser Sichtweise ist die Existenz irrationaler Zahlen offensichtlich.

Die grundlegenden mit reellen Zahlen ausführbaren Manipulationen (das Rechnen) sind Addieren, Multiplizieren und der Größenvergleich. Addition und Multiplikation geschieht mit Hilfe von in der Grundschule geübten Algorithmen, bei deren Aufruf einfache Ziffernoperationen mit den Daten der Dezimalbruchdarstellungen der beteiligten reellen Zahlen ausgeführt werden. Auch der Größenvergleich (die Anordnung) zweier reeller Zahlen geschieht durch Inspektion der Ziffern.

Eine Eigenheit der Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen ist es, nicht eindeutig zu sein. Zum Beispiel sind die beiden Zahlen $0.\overline{9}$ und 1 gleich. Das bedeutet, die beiden Dezimalbrüche stellen dieselbe reelle Zahl dar. Das sieht man so. Wir geben der durch $0.\overline{9}$ dargestellten Zahl einen Namen

$$x = 0.9999\ldots$$

Multiplizieren mit 10 ergibt

$$10x = 9.9999\ldots$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Zeile gibt

$$9x = 9.000\ldots$$

und daraus folgt $x = 1$.

Analog konstruierte Beispiele liegen auf der Hand. Diese Mehrdeutigkeit ist harmlos und eliminierbar durch Beschränkung auf nichtabbrechende Dezimalzahlen.

Die Festlegung auf die Grundzahl 10 in der Dezimaldarstellung ist nicht wesentlich. Man kann reelle Zahlen auch in jeder anderen Basis $b \geq 2$ darstellen, man spricht dann von einem b-adischen Bruch. Darüberhinaus gibt es noch gänzlich andere Darstellungen reeller Zahlen.

Für die Analysis ist nun die spezielle Art der Darstellung bedeutungslos, allein die Beziehungen der Zahlen untereinander, ihr Verhalten bei arithmetischen Operationen etc. sind wesentlich. Um einen exakten, von allen Eigenheiten verschiedener Darstellungen freien Begriff von 'reellen Zahlen' zu haben, werden ihre grundlegeneden Eigenschaften in den folgenden Axiomen festgehalten.

2 Reelle Zahlen

2.1 Addition, Multiplikation, Ordnung

Definition 1. *Die Gesamtheit aller reellen Zahlen bildet eine Menge $\mathbb{R}$, auf der zwei Verknüpfungen (Addition, Multiplikation) sowie eine Ordnungsrelation ($\leq$) gegeben sind, so, daß folgende Axiome gelten:*

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & (x+y)+z & = & x+(y+z) \\
(2) & x+y & = & y+x \\
(3) & \exists 0 \forall x\ (x+0 & = & x) \\
(4) & \forall x \exists y\ (x+y & = & 0) \\
(5) & (xy)z & = & x(yz) \\
(6) & xy & = & yx \\
(7) & \exists 1 \neq 0 \forall x\ (x1 & = & x) \\
(8) & \forall x \neq 0 \exists y\ (xy & = & 1) \\
(9) & x(y+z) & = & xy+xz \\
(10) & x \leq y & \vee & y \leq x \\
(11) & x \leq y \wedge y \leq z & \Rightarrow & x \leq z \\
(12) & x \leq y \wedge y \leq x & \Rightarrow & x = y \\
(13) & x \leq y & \Rightarrow & x+z \leq y+z \\
(14) & 0 \leq x \wedge 0 \leq y & \Rightarrow & 0 \leq xy
\end{array}
$$

In den Formeln bezeichnen x, y, z beliebige Elemente von $\mathbb{R}$. Das Element 0 in Axiom (3) ist durch ebendieses Axiom eindeutig bestimmt, sodaß es in Axiom (4) angesprochen werden kann. Das gleiche gilt für Axiome (7)(8).

Das nach (4) zu x existierende y mit $x+y=0$ ist eindeutig bestimmt und wird mit $-x$ bezeichnet. Das nach (8) zu $x \neq 0$ existierende y mit $xy = 1$ ist eindeutig bestimmt und wird mit x^{-1} bezeichnet. $x-y$ steht für $x+(-y)$, und $\frac{x}{y}$ (falls $y \neq 0$) für xy^{-1}. Die Relation $x < y$ steht für $x \leq y \wedge x \neq y$, $x \geq y$ für $y \leq x$ und $x > y$ bedeutet $y < x$. Reelle Zahlen $x > 0$ heißen **positiv**, jene mit $x \geq 0$ **nichtnegativ**. Analog: $x < 0$ **negativ**, $x \leq 0$ **nichtpositiv**.

Aus den Axiomen (1) - (14) folgt eine Fülle von einfach zu verifizierenden Rechenregeln.

Proposition 1. (Konsequenzen aus (1) - (14)).

1. $0x = 0$

2. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$

3. $(-x)(-y) = xy$

4. $xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 0$

5. $\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}$ $(yv \neq 0)$

6. $\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv+yu}{yv}$ $(yv \neq 0)$

7. $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x < y \vee x = y$

8. $x < y \;\Rightarrow\; x + z < y + z$

9. $x > 0 \wedge y > 0 \;\Rightarrow\; xy > 0$

10. $x \leq y \wedge a \leq b \;\Rightarrow\; x + a \leq y + b$

11. $x \leq y \wedge a < b \;\Rightarrow\; x + a < y + b$

12. $x \leq y \wedge z \geq 0 \;\Rightarrow\; xz \leq yz$

13. $x < y \wedge z > 0 \;\Rightarrow\; xz < yz$

14. $x \leq y \wedge z \leq 0 \;\Rightarrow\; xz \geq yz$

15. $x < y \wedge z < 0 \;\Rightarrow\; xz > yz$

Die gewohnten Regeln für das Rechnen sind so herleitbar. Elemente der Form $1+1+\cdots+1$ nennt man **natürliche Zahlen**, ihre Gesamtheit, die **Menge der natürlichen Zahlen** bezeichnet man mit $\mathbb{N}$. Wir verabreden, die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen zu rechnen, es gilt also $0 \in \mathbb{N}$. Natürliche Zahlen und deren Negative nennt man **ganzen Zahlen**, die Menge aller ganzen Zahlen ist also $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Die Menge aller **rationalen Zahlen** ist

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \right\}.$$

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \end{array}$$

das offene bzw abgeschlossene Intervall (mit Randpunkten a und b). Desgleichen gibt es die halboffenen Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$. Summe und Produkt endlich vieler Zahlen sind rekursiv definiert.

Definition 2. *Es seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reelle Zahlen.*

$\sum_{i=0}^{0} x_i := x_0$. $\sum_{i=0}^{n+1} x_i := \sum_{i=0}^{n} x_i + x_{n+1}$

$\prod_{i=0}^{0} x_i := x_0$. $\prod_{i=0}^{n+1} x_i := \prod_{i=0}^{n} x_i \cdot x_{n+1}$

Hier bezeichnet 'n' eine natürliche Zahl. Allgemeiner setzt man

$$\sum_{i=k}^{l} x_i = x_k + \cdots + x_l \text{ und } \prod_{i=k}^{l} x_i = x_k \cdots x_l \text{ (falls } k \leq l).$$

Potenzen sind iterierte Produkte der konstanten Folge $x_i = a$:

Definition 3. *Es sei* $a \in \mathbb{R}$*.*

$a^0 := 1$*. Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $a^{n+1} := a^n a$*.*

$a \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 0 \;\Rightarrow\; a^n := (a^{-1})^{-n}$

Die beiden Bedeutungen des Symbols a^{-1} (einmal als Inverses von a, dann als (-1)-te Potenz von a) sind gleich.

Aus Proposition 1 folgt, daß man endlich viele Ungleichungen addieren kann.

$$x_i \leq y_i \;\forall i = 0 \ldots n \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^{n} x_i \leq \sum_{i=0}^{n} y_i$$

und falls auch nur eine der in der Voraussetzung genannten Ungleichungen scharf ist $(x_{i_0} < y_{i_0})$ dann auch die Summe $(\sum_{i=0}^{n} x_i < \sum_{i=0}^{n} y_i$.

Definition 4. *Der Betrag einer reellen Zahl* x *ist*

$$|x| = \begin{cases} x & \ldots x \geq 0 \\ -x & \ldots x < 0 \end{cases}$$

Proposition 2. (Eigenschaften der Betragsfunktion).

$|x| \geq 0$*, und* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x + y| \leq |x| + |y|$

$|xy| = |x||y|$

$||x| - |y|| \leq |x - y|$

Die unter Punkt 2. genannte Eigenschaft hat den Namen **Dreiecksungleichung**. Sie wird uns später wiederbegegnen. Für die Ebene $\mathbb{R}^2$ besagt sie dann, daß die Summe zweier Seitenlängen eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als die Länge der dritten Seite.

Aus der Definition der natürlichen Zahlen ergibt sich unmittelbar das Prinzip der Induktion.[1]

Proposition 3. (Induktion). *Es sei* X *eine Menge. Wenn*

- $0 \in X$ *und*
- $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in X \;\Rightarrow\; n + 1 \in X)$ *dann gilt* $\mathbb{N} \subseteq X$*.*

[1]Eigentlich braucht man die Menge $\mathbb{N}$ in der Analysis nicht zu definieren. Natürliche Zahlen sind so etwas Grundlegendes, daß es eigenartig erscheint, sie im Rahmen der Theorie der reellen Zahlen definieren zu wollen, daß man also zuerst das komplizierte Gebilde $\mathbb{R}$ konstruiert, und danach 'natürliche Zahl' als spezielles Element von $\mathbb{R}$. Auch braucht man, um über $\mathbb{R}$ vernünftig reden zu können, so etwas wie durch natürliche Zahlen indizierte Objekte $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Man sollte natüerliche Zahlen als etwas absolut Evidentes ansehen, oder sie im Rahmen einer umfassenden Mengenlehre tatsächlich definieren, wie man das mag. Wie elementar natürliche Zahlen auch erscheinen mögen, unter ihren Eigenschaften gibt es beliebig komplizierte, die Zahlentheorie oder auch die Theorie formaler Sprachen zeigt uns das.

Es ist sinnvoller zu sagen, daß durch unsere 'Definition' von $\mathbb{N}$ eine Kopie der Menge der natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ wiedergefunden wird, mit allen ihren Eigenschaften. Das Induktionsprinzip - als eine wesentliche Eigenschaft von $\mathbb{N}$ ist dann nichts, was noch bewiesen werden müßte

Die Gesetze (1) bis (14) zeichnen die Menge der reellen Zahlen mit den Operationen 'Addition' und 'Multiplikation' als einen **geordneten Körper** aus. Sie werden auch von der Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen erfüllt, reichen also nicht aus, um $\mathbb{R}$ eindeutig zu charakterisieren. Ein vollständiges (i.e. ein $\mathbb{R}$ charakterisierendes) System von Axiomen entsteht aus (1) - (14) durch Hinzunahme des sogenannten **Vollständigkeitsaxioms** welches im Abschnitt 2.2 behandelt wird.

2.2 Vollständigkeit

Wir benötigen einige exakte Sprechweisen.

Definition 5. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.*

1. *s ist eine* **obere Schranke** *von X wenn $\forall x \in X(x \leq s)$*
2. *s ist eine* **untere Schranke** *von X wenn $\forall x \in X(x \geq s)$*
3. *s ist* **größtes Element von** *X wenn s obere Schranke von X und $s \in X$.*
4. *s ist* **kleinstes Element von** *X wenn s untere Schranke von X und $s \in X$.*
5. *X heißt (nach) oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke von X gibt.*
6. *X ist (nach) unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke von X gibt.*
7. *X heißt* **beschränkt***, wenn X oben und unten beschränkt ist.*

Für $a < b$ ist a eine untere Schranke (aber nicht kleinstes Element) von (a, b), ebenso ist $a-1$ eine untere Schranke; b ist obere Schranke von (a, b) (jedoch nicht größtes Element). a ist kleinstes und b größtes Element des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$ hat 0 zur unteren Schranke und 1 als größtes Element. Ein größtes Element einer Menge X ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt; man spricht dann von **dem** größten Element von X, oder auch vom **Maximum** von X, symbolisch $\max X$ oder $\max_{x\in X} x$. Dasselbe gilt für das kleinste Element, $\min X = \min_{x\in X} x$.

Wenngleich a nicht kleinstes Element von (a, b) sein kann (ein offenes Intervall hat so etwas nicht), so ist es doch nicht möglich, eine untere Schranke von (a, b) anzugeben, die größer ist als a. Die reelle Zahl a ist größtes Element der Menge aller unteren Schranken von (a, b).

Definition 6. *Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Das größte Element der Menge aller unteren Schranken (die größte untere Schranke) von X heißt* **Infimum** *von X. Das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von X heißt* **Supremum** *von X.*

Natürlich muß X oben beschränkt sein, um fähig zu sein, ein Supremum zu haben. Wenn es existiert, ist es - als kleinstes Element der Menge $\{s \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X(x \leq s)\}$ - eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\sup X$ oder $\sup_{x\in X} x$ für X's Supremum, so es existiert. Analog,

$$\inf X = \inf_{x\in X} x = \text{groeßtes Element } \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X(u \leq x)\}.$$

Klarerweise ist für eine Menge X mit größtem Element $\max X$ auch eine obere Schranke von X und zwar die kleinstmögliche, also $\max X = \sup X$. Genauso: $\min X = \inf X$ (so X ein Minimum hat).

Haben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer ein Supremum und Infimum? Mit Hilfe der Axiome (1) - (14) allein ist diese Frage nicht entscheidbar. Auch die rationelen Zahlen erfüllen (1) - (14), - man sagt, $\mathbb{Q}$ sei ein Modell dieses Axiomensystems - und die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ist zwar beschränkt, doch gibt es in $\mathbb{Q}$ keine Objekte, die Infimum oder Supremum dieser Menge sein könnten, die Irrationalität von $\sqrt{2}$ verhindert das. Vielleicht noch merkwürdiger, daß in $\mathbb{Q}$ die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$ zwar 0 zum Infimum hat, wir das aus den Axiomen (1) - (14) aber nicht ableiten können; es gibt noch weitere Modelle, in denen das gerade nicht gilt.

Ein ansehnlichen Anteil aller Menschen stimmt jedenfalls darin überein, was reelle Zahlen leisten sollen, das Studium möglichen Realisierungen von $\mathbb{R}$ weist hier den Weg. Man will einfach, daß beschränkte Mengen kleinste obere und größte untere Schranken haben, die 'Löcher' in den rationalen Zahlen sollen in $\mathbb{R}$ verschwunden sein. Wir fordern also für $\mathbb{R}$ folgendes Gesetz:

Definition 7 (Axiom (15)). *Jede nichtleere oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen hat ein Supremum.*

Man sagt, $\mathbb{R}$ sei vollständig (genauer ordnungsvollständig), und spricht Axiom (15) als (eine moögliche Formulierung der) Vollständigkeit, als Vollständigkeitsaxiom an. Damit sind die oben genannten Eigenarten aus der Welt, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ hat jetzt ein Supremum ($\exists\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Ebenso gilt $0 = \inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$.

Satz 1. (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche.*

Proof. Angenommen, das ist falsch, es gibt also eine reelle Zahl x zu der es keine natürliche Zahl gibt, die größer ist als x. Das heißt dann, dass alle natürlichen Zahlen kleiner oder gleich x sein müssen, daß also x eine obere Schranke von $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ist. Nach Axiom (15) muß $\mathbb{N}$ dann ein Supremum in $\mathbb{R}$ haben, $s = sup\,\mathbb{N}$. Das heißt, $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \leq s)$, und keine Zahl, die kleiner ist als s ist noch eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Nun, $s - 1 < s$, also ist $s - 1$ nicht obere Schranke von $\mathbb{N}$, und das bedeutet, daß nicht jedes $n \in \mathbb{N}$ kleiner oder gleich $s - 1$ sein kann. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Proposition 1 Punkt 8. zeigt dann, daß $n + 1 > s$. Das kann nicht sein, da doch s obere Schranke von $\mathbb{N}$ war. □

Die obige Überlegung ist, was man einen indirekten Beweis nennt; man nimmt die Negation von dem an, was man zeigen möchte, und leitet aus dieser Annahme und den Verhältnissen, die man in der Situation noch kennt (hier den Axiome (1) - (15)) einen Widersruch her. Indirekte Beweise haben zentrale Bedeutung, wenn man wie hier, zeigen will, daß es etwas nicht gibt (eine obere Schranke von $\mathbb{N}$).

Korollar 1. *$x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $ny > x$.*

Proof. Nach Satz 1 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > xy^{-1}$. Daraus folgt $ny > x$. □

Eine geometrische Interpretation dazu wäre: Durch Aneinanderreihung von endlich vielen Strecken gleicher positiven Länge (y), kann man, mag diese auch noch so klein sein, jeden Punkt (x) auf der reellen Geraden übertreffen.

Das Archimedische Prinzip hat noch eine weitere Formulierung

Korollar 2. $x > 0 \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}\ (\frac{1}{n} < x)$.

Jetzt sollte klar sein, daß tatsächlich $0 = \inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$. Natürlich gilt auch eine duale Version der Vollständigkeit.

Korollar 3. *Jede nichtleere, unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.*

Wir können nun die Existenz in $\mathbb{R}$ von Quadratwurzeln reeller Zahlen beweisen.

Satz 2. $\forall a \geq 0\ \exists s \in \mathbb{R}$ *mit* $s^2 = a$.

Proof. Die Zahlen 0 und 1 sind jeweils ihre eigene Quadratwurzel; sei also a verschieden von 0 und 1, und $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}$. Zuerst zeigen wir, daß S oben beschränkt ist. Damit hat S ein Supremum, von dem wir dann zeigen, daß sein Quadrat gleich a ist.

- S ist nach oben beschränkt:

  Sei zuerst $a > 1$. Für ein beliebiges $x \in S$ gilt dann entweder $x \leq 1$ und somit auch $x < a$, oder aber $1 < x$, woraus $x < x^2 \leq a$ folgt; jedenfalls gilt $x < a$, also ist a eine obere Schranke von S.

  Im Falle, daß $0 < a < 1$, sind alle $x \in S$ kleiner als 1. Denn aus $x \in S \wedge x \geq 1$ folgt $x^2 \geq x \geq 1$ und somit $1 \leq x^2 \leq a < 1$, was unmöglich ist. Für beide Fälle simultan können wir sagen, daß

  $$\forall x \in S\ (x < \max\{a, 1\}).$$

- $(\sup S)^2 = a$:

  Da wir jetzt wissen, daß die Menge S oben beschränkt ist, muß sie eine Supremum haben, sei also $s := \sup S$. Wegen $0 \in S$ ist jedenfalls $s \geq 0$. Für s^2 gilt unvermeidlicherweise $s^2 < a \vee s^2 > a \vee s^2 = a$ (das gilt für jede reelle Zahl). Wir widerlegen jetzt der Reihe nach $s^2 < a$ und dann $s^2 > a$. Wenn das gelungen ist, bleibt als einziger Ausweg, daß $s^2 = a$, und das bedeutet gerade, daß s eine Wurzel aus a ist.

  Angenommen also, daß $s^2 < a$. Dann ist $\varepsilon := a - s^2 > 0$. Jedenfalls ist $2s + 1 > 0$ und damit $\frac{\varepsilon}{2s+1} > 0$. Wir wählen jetzt eine Zahl δ so, daß

  $$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2s+1} \text{ und } \delta < 1.$$

  So eine Zahl muß es geben (nach dem Archimedischen Prinzip gibt es sogar ein $\frac{1}{n}$ mit dieser Eigenschaft). Multiplikation mit dem (positiven) Nenner ergibt $(2s + 1)\delta < \varepsilon$, also

  $$2s\delta + \delta < \varepsilon. \tag{1}$$

  Da $0 < \delta < 1$ folgt durch Multiplikation mit δ, $\delta^2 < \delta$, somit (durch Addition) $2s\delta + \delta^2 < 2s\delta + \delta$, Vergleich mit (1) ergibt

  $$2s\delta + \delta^2 < \varepsilon, \text{ Addition mit } s^2$$

  $$s^2 + 2s\delta + \delta^2 < s^2 + \varepsilon. \tag{2}$$

Die linke Seite von (2) ist $(s+\delta)^2$, die rechte ist genau a, also

$$(s+\delta)^2 < a.$$

Es folgt $s+\delta \in S$ und $s+\delta > s$, und das kann nicht sein, da für s als obere Schranke von S, $s+\delta \leq s$ sein muß. Die Annahme $s^2 < a$ ist somit falsch!

Angenommen, $s^2 > a$. Dann ist $s > 0$ und $\varepsilon := s^2 - a > 0$. Wir wählen eine Zahl δ so, daß $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2s}$ und $\delta < s$. Dann

$$2s\delta - \delta^2 < 2s\delta < \varepsilon = s^2 - a \quad \text{und daher}$$

$$a < s^2 - 2s\delta + \delta^2 = (s-\delta)^2$$

Ein Element $x \in S$ kann jetzt nicht größer als $s-\delta$ sein, da aus $x > s-\delta > 0$, $x^2 > (s-\delta)^2 > a$ folgt, wo doch aber $x^2 \leq a$. Also ist $x \leq s-\delta$. Das gilt für alle $x \in S$ und so ist $s-\delta$ eine obere Schranke von S die kleiner als s - die kleinste obere Schranke von S - ist, ein Widerspruch!

$\square$

Korollar 4. *Jedes $a \geq 0$ hat eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel.*

Proof. Wir wissen, daß es ein $s > 0$ gibt mit $s^2 = a$. Wegen $(-s)^2 = s^2$ ist auch $(-s)^2 = a$, und natürlich gilt $-s \neq s$, es gibt also zwei Quadratwurzeln von a.

Angenommen es gäbe noch eine weitere, ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t^2 = a$. Dann ist $t^2 = s^2$, also $t^2 - s^2 = (t-s)(t+s) = 0$. Das bedeutet $t = s$ oder $t = -s$. Die Zahl t ist also nichts Neues, es gibt nicht mehr Wurzeln als s und $-s$. $\square$

Definition 8. $a \geq 0$. *Das Symbol $\sqrt{a}$ bezeichne die eindeutig bestimmte Zahl $s \geq 0$ mit $s^2 = a$.*

Da nun insbesondere $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, folgt, daß es **irrationale Zahlen** gibt, daß also $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Noch eine Konsequenz des Archimedischen Prinzips: in jedem nichtentarteten Intervall sitzen rationale Punkte.

Satz 3. *Jedes nichtleere offene Intervall (a,b) enthält unendlich viele rationale Zahlen*

Proof. Es sei $0 \leq a < b$. Dann ist $b - a > 0$, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Nach Korollar 1 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ sodaß $k\frac{1}{n} > a$. Sei m das kleinste solche k; es gilt also $m\frac{1}{n} > a$. Angenommen $m\frac{1}{n} \geq b$. Dann muß $m \geq 1$ sein, sodaß $m - 1 \in \mathbb{N}$. Jetzt gilt

$$(m-1)\frac{1}{n} = m\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > a$$

und das widerspricht der Minimalität von m. Die Annahme muß also falsch sein, d.h., es gilt $m\frac{1}{n} < b$. Damit ist $\frac{m}{n}$ eine rationale Zahl mit $a < \frac{m}{n} < b$. Im Falle, daß $0 \leq a < b$ gilt, gibt es also eine rationale Zahl r mit $r \in (a,b)$.

Wenn $a < 0 < b$ gilt, ist $0 \in (a,b)$ ein rationales Element. Falls nun $a < b \leq 0$, folgt $0 \leq -b < -a$. Nach obiger Überlegung gibt es ein rationales r im Intervall $(-b,-a)$. Dann ist $-r$ auch rational und $-r \in (a,b)$.

In jedem fall gibt es also eine rationale Zahl r_1 in (a, b). Dann ist $a < r_1 < b$ und (a, r_1) ist ein offenes Intervall, sodaß es eine rationale Zahl $r_2 \in (a, r_1)$ gibt. So fortfahrend erhält man eine unendliche Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ rationaler Zahlen in (a, b). Da die r_i paarweise verschieden sind, haben wir unendlich viele rationale Zahlen in (a, b) gefunden. $\square$

Mit dem Vollständigkeitsaxiom ist das formale System (1) - (15) komplett.

Theorem 1. *Die reellen Zahlen sind durch die Axiome (1) - (15) eindeutig charakterisiert. Je zwei Modelle des Systems (1) - (15) sind isomorph.*

Das ist Vollständigkeit in einem ganz anderen Sinn. Man nennt ein System von Bedingungen ein kategorisches Axiomensystem, wenn je zwei Modelle isomorph sind, das heißt, wenn zwei Strukturen jeweils alle Gesetze des Systems erfüllen, unterscheiden sie sich höchstens durch verschiedene Namen voneinander, es gibt dann eine Bijektion, welche die Namen der einen in die der anderen übersetzt, und alle Relationen bewahrt. Das System (1) - (15) ist kategorisch.

3 Mengen, Relationen, Abbildungen

3.1 Mengen

Mehrfach ist das Wort 'Menge' aufgetreten, gewöhnlich wird unterstellt, daß man zu verstehen hat, was es bedeuten soll. In der Analysis, wo alle auftretenden Mengen irgendwie von Zahlen abstammen ist das auch gerechtfertigt. Eine Menge beinhaltet jedenfalls irgendwelche Dinge, ihre Elemente, und ist durch diese auch vollständig bestimmt; wenn A und B Mengen bezeichnen hat man

$$A = B \iff \forall x\, (x \in A \iff x \in B).$$[2]

Um zu verifizieren, daß A und B identisch sind, muß man zeigen, daß jedes Objekt, welches Element von A ist, auch zu B gehört, und umgekehrt. Mit der Definition

$$A \subseteq B \iff \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

in Worten 'A ist Teilmenge von B', läuft das darauf hinaus, zu zeigen, daß $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Die Teilmengenrelation ist eine **partielle Ordnung**, das heißt, es gilt

$$\begin{array}{cl} A \subseteq A & \text{Reflexivitaet} \\ A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C & \text{Transitivität} \\ A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B & \text{Antisymmetrie} \end{array}$$

Gesetze, welche auch von den reellen Zahlen mit deren Ordnung geteilt werden.

Definition 9.

$$\begin{array}{rcll} A \cap B &=& \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} & \text{Durchschnitt} \\ A \cup B &=& \{x \mid x \in A \vee x \in B\} & \text{Vereinigung} \\ A \setminus B &=& \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} & \text{Differenz} \end{array}$$

[2] Das ist ein Axiom der Mengenlehre; Mengen sind durch ihre Elemente bestimmt, durch ihre 'Ausdehnung': Extensionalitätsaxiom.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \mid \forall i \in I\ (x \in A_i)\}\\
\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \mid \exists i \in I\ (x \in A_i)\}\\
\mathcal{P}(A) &= \{B \mid B \subseteq A\}
\end{aligned}$$

In den Ausdrücken $\bigcap_{i\in I} A_i$ und $\bigcup_{i\in I} A_i$ steht I für eine Indexmenge. Sie ist hier von untergeordneter Bedeutung, dient nur dazu, über 'viele' Mengen sprechen zu können. Falls z.B. $I = \{1, 2\}$, $M_1 = A$ und $M_2 = B$, dann gilt $\bigcap_{i\in I} M_i = A \cap B$, in diesem Sinn sind die 'großen' Operationen $\bigcap_{i\in I}, \bigcup_{i\in I}$ Verallgemeinerungen der 'kleinen' $\cap$ und $\cup$.

$\mathcal{P}(A)$ ist die **Potenzmenge** der Menge A. Ihre Elemente sind selbst Mengen[3] , und zwar die, welche Teilmengen sind von A. Ist z.B. $A = \{a, b, c\}$, dann ist die Potenzmenge von A gegeben durch

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Oft ist eine Menge X als 'Universum' gegeben und man arbeitet mit Teilmengen von X (d.h., in $\mathcal{P}(X)$). Dann ist das **Komplement** von $A \subseteq X$ definiert als $A^c = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Bei Verwendung dieser Notation muß klar sein, welche Menge das Universum ist.

Proposition 4. *Es seien A, B, C beliebige Mengen; A_i, B_i ($\forall i \in I$) auch.*

$$\begin{aligned}
(A\cap B)\cap C &= A\cap(B\cap C) & (A\cup B)\cup C &= A\cup(B\cup C)\\
A\cap B &= B\cap A & A\cup B &= B\cup A\\
A\cap A &= A & A\cup A &= A\\
A\cap(A\cup B) &= A & A\cup(A\cap B) &= A\\
A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) & A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
A\setminus(B\cap C) &= (A\setminus B)\cup(A\setminus C) & A\setminus(B\cup C) &= (A\setminus B)\cap(A\setminus C)\\
A\cap\textstyle\bigcup_i B_i &= \textstyle\bigcup_i(A\cap B_i) & A\cup\textstyle\bigcap_i B_i &= \textstyle\bigcap_i(A\cup B_i)\\
A\setminus\textstyle\bigcap_i B_i &= \textstyle\bigcup_i(A\setminus B_i) & A\setminus\textstyle\bigcup_i B_i &= \textstyle\bigcap_i(A\setminus B_i)
\end{aligned}$$

Proposition 5. *Jetzt seien A, B und A_i Teilmengen der Menge X.*

$$\begin{array}{cc}
(A\cup B)^c = A^c\cap B^c & (A\cap B)^c = A^c\cup B^c\\
\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big)^c = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^c & \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c
\end{array}$$

Das sind die Gesetze von De Morgan. Die 'kleinen' folgen natürlich sofort aus den entsprechenden 'großen'.

[3]Daß die Elemente einer Menge selbst Mengen sind, ist nichts Ungewöhnliches, es ist im Gegenteil Absicht. Irgendwelche Dinge in abstrakten Töpfen zu versammeln und dann die Eigenschaften von Durchschnitt und Vereinigung an ihnen zu zelebrieren, ist nicht sensationell. Die Ausdruckskraft (und auch eine potentielle Widersprüchlichkeit) des Konzepts 'Menge' entwickelt sich erst, wenn Mengen Elemente sein dürfen. In den meisten axiomatischen Mengenlehren wird das zum Dogma: es gibt nur Mengen, sonst nichts. Alle Objekte (der Mathematik!) sind dort irgendwelche Mengen. Also auch natürliche Zahlen, reelle Zahlen, und Punkte (etwas, das bekanntlich keine Teile haben sollte). Die Elemente der reellen Zahl π als Menge zu beschreiben, ist dabei nicht beabsichtigt. Es geht mehr um Einfachheit und Homogenität in der Natur der zu untersuchenden Objekte; wenn alle Dinge Mengen sind, müssen alle Dinge den Gesetzen der Mengenlehre gehorchen. In einem chaotischen Universum hat so ein Prinzip auch einen autotherapeutischen Aspekt.

3.2 Abbildungen

Es seien X, Y beliebige Mengen. Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Zuordnung der Elemente von X zu Elementen von Y. Dabei wird **JEDEM** $x \in X$ **GENAU EIN** $y \in Y$ zugeordnet.

Wir schreiben $f\colon X \longrightarrow Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ um auszudrücken, daß f eine Abbildung von X nach Y ist. Das durch f dem Element $x \in X$ eindeutig zugeordnete $y \in Y$ schreibt man als $f(x)$, es ist der **Wert** der Abbildung f an der Stelle x (der Funktionswert in x). Der **Definitionsbereich** (die Domäne) der Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist die Menge X, ihr Zielbereich (Codomain) ist Y, und ihr **Wertbereich** (das Image) ist die Menge $\mathrm{im}(f)$ der tatsächlich getroffenen Elemente

Definition 10. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

$$\mathrm{dom}(f) = X,\ \mathrm{cod}(f) = Y,\ \mathrm{im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X\ (f(x) = y)\}.$$

Für jede Abbildung f gilt also $f\colon \mathrm{dom}(f) \longrightarrow \mathrm{cod}(f)$. Die Abbildung f wirkt auf die Elemente von $\mathrm{dom}(f)$ indem es ihnen Elemente von $\mathrm{cod}(f)$ zuordnet. Dabei induziert f zwei weitere Zuordnungen, jetzt zwischen den Teilmengen von X und jenen von Y:

Definition 11. *$f\colon X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.*

1. *$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \mid \exists x \in A\ (f(x) = y)\}$ ist das* **Bild von** *A*
2. *$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ das* **Urbild von** *B*

unter f. Die erwähnten Abbildungen sind dann

$$\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y),\ A \mapsto f(A) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ B \mapsto f^{-1}(B).$$

Proposition 6. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$, $A, B, A_i \subseteq X$ und $C, D, C_i \subseteq Y$. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
f(A \cup B) & = & f(A) \cup f(B) & f^{-1}(C \cup D) & = & f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\
f(A \cap B) & \subseteq & f(A) \cap f(B) & f^{-1}(C \cap D) & = & f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \\
f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) & = & \bigcup_{i\in I} f(A_i) & f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) & = & \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i) \\
f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) & \subseteq & \bigcap_{i\in I} f(A_i) & f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) & = & \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i) \\
f(A \setminus B) & \supseteq & f(A) \setminus f(B) & f^{-1}(C \setminus D) & = & f^{-1}(C) \setminus f(D) \\
f(B^c) & \supseteq & f(X) \setminus f(B) & f^{-1}(D^c) & = & f^{-1}(D)^c \\
f(X) & = & \mathrm{im}(f) & f^{-1}(Y) & = & X \\
f^{-1}(f(A)) & \supseteq & A & f(f^{-1}(D)) & = & D \cap f(X) \subseteq D.
\end{array}$$

Definition 12. *Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

$$f \text{ ist } \textbf{injektiv} \iff \forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

$$f \text{ ist } \textbf{surjektiv} \iff \forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

$$f \text{ ist } \textbf{bijektiv} \iff f \text{ ist injektiv und surjektiv.}$$

Beispiel 1.
$f_1\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$ *injektiv, nicht surjektiv;*
$f_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$ *surjektiv, nicht injektiv;*
$f_3\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$ *injektiv und surjektiv;*
$f_4\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \mapsto x^2$ *nicht surjektiv, nicht injektiv.*

Die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x^2$ allein definiert also noch keine Abbildung. Erst bei zusätzlicher Angabe von Definitionsbereich und Zielbereich ist eine Abbildung $X \longrightarrow Y$ beschrieben.

Vielfach wird das Wort 'Funktion' synonym für 'Abbildung' verwendet. Wir vereinbaren, daß eine Funktion eine reell- oder komplexwertige Abildung sein soll. Eine Funktion ist also eine Abbildung, deren Werte Zahlen sind; so sind die Abbildungen aus Beispiel 1. Funktionen, während z.B. die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ x \mapsto \{y \mid y^2 = x\}$$

von uns nicht Funktion genannt wird.

Wenn eine Menge A Teilmenge ist von einer Menge X, $A \subseteq X$, gibt es die **Inklusionsabbildung**

$$i\colon A \longrightarrow X, x \mapsto x.$$

Speziell für $A = X$ nennt man die Inklusion $X \longrightarrow X$ **identische Abbildung** oder **Identität** auf X. Ein verbreitetes Symbol für sie ist 1_X, man darf aber auch id_X schreiben.

Definition 13. *Es seien $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ Abbildungen. Die* **Komposition** *(Hintereinanderschaltung) von f und g ist die Abbildung*

$$g \circ f\colon X \longrightarrow Z,\ x \mapsto g(f(x)).$$

Beispiel 2. *$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 3$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Dann ist $g \circ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

während $f \circ g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$$

In diesem Fall gilt $g \circ f \neq f \circ g$, die Komposition ist also im allgemeinen nicht kommutativ. Überdies ist $g \circ f$ nur dann (als eine Abbildung) definiert, wenn $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$. Daß es bei obigem Beispiel beides, $g \circ f$ und $f \circ g$, gibt, liegt daran, daß dort $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$ und $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$. Die Komposition ist aber jedenfalls assoziativ.

Proposition 7. *$X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ und $Z \xrightarrow{h} W$ Abbildungen. Dann ist*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Die **Restriktion** einer Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ auf die Menge $A \subseteq X$ ist die Abbildung $f|_A = f \circ i$, wobei $A \xrightarrow{i} X$ die Inklusion bezeichne. Es gilt

$$f|_A\colon A \longrightarrow Y,\ x \mapsto f(x),$$

$f|_A$ tut dasselbe wie f, nur eben für die Elemente $x \in A$ statt für alle $x \in X$.

Eine bijektive Abbildung kann invertiert werden. Mann polt einfach alle Pfeile um.

Definition 14. *Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv. Die* **zu** *f* **inverse Abbildung** *ist*

$$f^{-1}\colon Y \longrightarrow X,\ y \mapsto x \text{ wobei } y = f(x).$$

Nur wenn $X \xrightarrow{f} Y$ bijektiv ist, macht f^{-1} als Abbildung Sinn[4]. Dann ist $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ und es gilt

$$f^{-1} \circ f = 1_X \text{ und } f \circ f^{-1} = 1_Y.$$

3.3 Relationen

Eine der ganz grundlegenden Konstruktionen: aus Objekten x und y bilden wir das **geordnete Paar** (x, y). Sieht aus wie ein offenes Intervall, trotzdem werden wir die beiden Begriffe hoffentlich nicht verwechseln[5]. Wie man das Paar (x, y) wirklich definiert, ist ziemlich gleichgültig, wichtig ist allein seine es charakterisierende Eigenschaft

$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \wedge y = v, \tag{3}$$

zwei Paare sind gleich, genau dann wenn ihre ersten Komponenten übereinstimmen und auch ihre zweiten[6]. Eine Relation ist einfach eine Menge, die ausschließlich aus geordneten Paaren besteht.

Definition 15. *X heißt* **Relation***, wenn* $\forall x \in X \exists a, b$ mit $x = (a, b)$.

So ist die Ordnung reeller Zahlen eine Relation, eben $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \leq y\}$. Das Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare, deren Komponenten aus diesen Mengen kommen, die größte Relation herstellbar aus Elementen von X und Y.

Definition 16. *X, Y Mengen. Ihr* **Kartesisches Produkt** *ist die Menge*

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} = \{p \mid \exists x \in X \exists y \in Y \textit{ mit } (x, y) = p\}.$$

Das Produkt der Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ ist das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die reelle Ebene, das Produkt aus der Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und dem Intervall $[0, 1]$ ist die Zylinderfläche $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Hier treten erstmals iterierte geordnete Paare auf: ein Element des Zylinders ist ein Paar (s, t) mit $s \in \mathbb{S}^1$ und $0 \leq t \leq 1$, s ist dabei selbst ein Paar (x, y) (mit $x^2 + y^2 = 1$), das Zylinderelement somit $((x, y), t)$. Wir wollen natürlich haben, daß dieses Ding ein Punkt des dreidimensionalen reellen Raums sei, also ein Zahlentripel. Man definiert gleich allgemein rekursiv

$$(x) = x \text{ und } (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \tag{4}$$

[4] Achtung! Falls $X \xrightarrow{f} Y$ eine beliebige Abbildung und $B \subseteq Y$, dann gibt es das Urbild $f^{-1}(B)$. f^{-1} selbst braucht nicht zu existieren - es sei denn, f ist bijektiv. Wenn nun $X \xrightarrow{f} Y$ bijektiv ist, haben wir zwei Definitionen für $f^{-1}(B)$: einmal als Urbild von B unter f, zum anderen als Bild von B unter der Abbildung $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$. Da beides dann die gleiche Menge ist, gibt das keine Komplikation.

[5] Wem die Furcht vor solch einer Verwechslung den Tag verdirbt, mag $]a, b[$ für das Intervall (a, b) schreiben.

[6] Eine beliebte Definition ist $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, wir verdanken sie Kuratowski. Sie leistet für die Zermelo-Fränkelsche Mengenlehre, was man von ihr will, nämlich (3). Es gibt auch andere, ähnlich technische Definitionen für (x, y). Vorstellen muß man sich dabei nicht viel; die einzig wichtige Visualisierung von (x, y) ist die als 'Punkt' mit erster Koordinate x und zweiter y, und diese Vorstellung kommt wieder nur von (3).

und nennt die entstehenden Dinge 'Tripel', 'Quadrupel', Quintupel, usw. und irgendwann, wenn man nicht mehr weiß, wie's lateinisch weitergeht, einfach n-tupel. Parallel werden iterierte kartesische Produkte definiert

$$X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Irgendwie sollte nun $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ auch ein Zylinder sein, diesmal sind seine Elemente aber rechtsgeklammerte Tripel $(t,(x,y))$. Wir wollen nicht damit beginnen, aus so etwas ein Problem zu machen und setzen fest, daß alle wie auch immer geklammerten n-tupel dasselbe bedeuten mögen, wie das in (4) kanonisch linksgeklammerte. Damit ist der Weg frei für Identifizierungen wie

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \text{ etc. } = \mathbb{R}^5,$$

was sich bald als nützlich erweisen soll. Abbildungen entpuppen sich als spezielle Relationen.

Definition 17. $f\colon X \longrightarrow Y$. *Der* **Graph von** f *ist die Menge*

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$$

Es gilt $\operatorname{graph}(f) \subseteq \operatorname{dom}(f) \times \operatorname{cod}(f)$. Der Begriff 'Abbildung' ist für die Mathematik so grundlegend, daß wir nicht vermeiden konnten, ihn ganz an den Anfang der Betrachtungen zu stellen; so wirklich definiert haben wir ihn aber nicht. Was bitte ist eine Zuordnung? Eine exakte Definition von Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ wäre als Tripel $(X, \mathrm{graph(f)}, \mathrm{Y})$.

Man mag bezweifeln, jetzt mehr über Abbildungen zu wissen, als zuvor. Denn was ist an ein paar geordneten Paaren besser als an ein paar Pfeilen. Aber genau das ist der Kern. Ein Paar (x,y) ist ein Pfeil; er weist von x nach y. Und wem es Freude macht, der definiere einen Pfeil $x \mapsto y$ als $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

3.4 Die Mächtigkeit von Mengen

Eine natürliche Frage, die sich bei Betrachtung einer Menge stellt, ist die nach der Anzahl ihrer Elemente. Hat eine Menge endlich viele Elemente wie z.B. die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$ so ist klar, was gemeint ist: A hat genau zwei Elemente. Wenn man vielleicht auch nicht immer imstande ist, die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge anzugeben, so ist es doch offensichtlich, daß jede endliche Menge eine durch sie selbst eindeutig bestimmte natürliche Zahl als die Anzahl ihrer Elemente haben muß.

Definition 18. *Es sei X eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente von X heißt ihre* **Kardinalität, Kardinalzahl** *oder* **Mächtigkeit**, *symbolisch* $\operatorname{Card}(X)$.

Die Kardinalität einer endlichen Menge ist also eine natürliche Zahl. Es war die Geburtsstunde der Mengenlehre, als erstmals die Frage nach der Anzahl der Elemente unendlicher Mengen gestellt worden war.

Wir wissen von gewissen Mengen, daß sie unendlich sind, das heißt, unendlich viele Elemente haben. Die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}$, ist unendlich, also auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, die ja Obermengen von $\mathbb{N}$ sind.

Es ist nicht falsch, zu sagen, daß $\mathbb{N}$ sowohl als auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ von unendlicher Mächtigkeit sind, aber haben sie tatsächlich gleich viel Elemente, so daß man sagen kann

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) \ ?$$

So wenig wir wissen, was $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ oder $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$ sein soll, so wenig können wir sagen, ob diese beiden Dinge gleich sind, oder nicht.

Es gibt nun eine Möglichkeit, beliebige Mengen in Bezug auf ihre Mächtigkeit zu vergleichen. Wir orientieren uns an den Verhältnissen bei endlichen Mengen, wo der Begriff 'Kardinalität' keine Schwierigkeiten macht.

Proposition 8. *Für endliche Mengen X, Y gilt:*

1. $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y) \iff \exists f \colon X \longrightarrow Y$ *injektiv.*
2. $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) \iff \exists f \colon X \longrightarrow Y$ *bijektiv.*

Das ist völlig evident. Für unendliche Mengen nehmen wir das als eine Definition.

Definition 19. *Es seien X, Y beliebige Mengen.*

1. $X \leq Y \iff \exists f \colon X \longrightarrow Y$ *injektiv.*
2. $X \sim Y \iff \exists f \colon X \longrightarrow Y$ *bijektiv.*
3. $X < Y \iff X \leq Z \wedge \neg X \sim Y.$

Falls $X \leq Y$, sagt man, die Menge X sei von kleiner-oder-gleicher Mächtigkeit als Y. Wenn $X \sim Y$, sagt man, X und Y seien gleichmächtig.

Damit ist noch nicht klar, was z.B. $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$ ist, jedenfalls aber können wir unendliche Mengen vergleichen, in einer Weise, die bei endlichen Mengen auf den Anzahl-der-Elemente Begriff, die Kardinalzahl - welche dort einfach ein Element von $\mathbb{N}$ ist - führt.

Beispiel 3.

$\mathbb{N} \leq \mathbb{Z}$. *Es gibt eine Injektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, z.B. die Inklusion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$.*

Das geht natürlich immer, wenn eine Menge Teilmenge einer anderen ist, also $\mathbb{N} \leq \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$. Aber auch

$\mathbb{R} \leq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leq \cdots$ *mit Hilfe der Abbildungen $x \mapsto (x, 0)$, $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0)$, usw.*

Das geht irgendwie zu einfach. Werden die Mächtigkeiten all dieser Mengen wirklich immer größer?

Proposition 9.

1. *$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind alle gleichmächtig, also $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.*
2. $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots.$
3. $\mathbb{N} < \mathbb{R}.$

Jetzt haben wir's, es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche. Aber gibt es nicht auch mehr ganze Zahlen als natürliche, etwa doppelt so viele? Nein!

Es gibt eine Hemmung, gleich von unendlichen Kardinalzahlen zu sprechen[7]. Das ist auch nicht nötig, es reicht für die meisten Zwecke, Mengen mittels injektiver/bijektiver Abbildungen zu vergleichen; indem wir $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y)$ sagen, drücken wir aus, daß $X < Y$.

Ein Satz von Cantor besagt, daß für jede Menge X, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$. Nun kann man auch $\mathcal{P}^2 X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ bilden und $\mathcal{P}^3 X \ldots$, das heißt, es gibt eine Kaskade unendlicher Kardinalitäten.

In Proposition 9 wurde festgestellt, daß $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Man hat das Gefühl, daß $\mathbb{R}$ aus so viel mehr Elementen besteht als $\mathbb{N}$, daß die Frage naheliegt: Gibt es etwas dazwischen? Mit etwas Phantasie ist es möglich, unglaublich verschiedenartige, auch merkwürdige Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$ zu betrachten und miteinander zu vergleichen, das Ergebnis ist immer das gleiche: Entweder ist X endlich, oder $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ oder $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Gibt es keine Menge X mit $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$? Das (daß es keine gibt!) ist die Aussage der speziellen Kontinuumshypothese (SCH).

CH 1. $\neg\exists X$ *mit* $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Es gibt auch eine allgemeine Kontinuumshypothese (GCH):

CH 2. X *unendlich* $\Rightarrow \neg\exists Y$ *mit* $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$.

Aus GCH folgt unmittelbar SCH, nur, ist GCH wahr oder falsch? Die Antwort lautet: weder noch, das heißt, man kann es mit GCH halten, wie man will. Genauer: K. Gödel bewies, daß GCH nicht widerlegt werden kann; P.J. Cohen zeigte dann, daß GCH nicht bewiesen werden kann. Beides relativ zu den Axiomen einer der üblichen Mengenlehren.

4 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen, eine geometrische Sprache zu entwickeln. Anfangs ist das nur ein Spleen, wir sagen, die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sei die Zahlen**gerade** $\mathbb{R}^1$ und nennen ihre Elemente (die reellen Zahlen) **Punkte**. Doch es geht weiter.

4.1 Die Gerade $\mathbb{R}^1$

Was ist der Abstand[8] zwischen zwei Punkten in $\mathbb{R}^1$?

Definition 20. *Die Distanz zwischen den reellen Zahlen x und y ist*

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{5}$$

Das ist, was man erwartet haben mag. Jedenfalls ist die 'Distanz' eine Abbildung $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sie ordnet je zwei Punkten x, y auf der Zahlengeraden eine reelle Zahl zu, nämlich $d(x, y) = |x - y|$. Diese Abbildung hat ein paar grundlegende Eigenschaften.

[7] Es gibt die Theorie der Kardinalzahlen, ein Teilgebiet der Mengenlehre. Kardinalzahlen werden dort definiert als spezielle Mengen, welche eine Klasse gleichmächtiger Mengen repräsentieren.

[8] Abstand = Distanz: ein geometrischer Begriff.

Proposition 10. *Für die Abbildung* (5) *gilt:*

1. $d(x,y) \geq 0. \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Das sind nur Umformulierungen entsprechender Eigenschaften der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$. Punkt 3. heißt Dreiecksungleichung, natürlich sind Dreiecke in $\mathbb{R}^1$ zu Intervallen degeneriert.

4.2 Die Ebene $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die reelle Ebene. Ihre Punkte sind die Paare (x,y) reeller Zahlen x,y. Mit ihnen kann man rechnen.

Definition 21 (Algebraische Operationen in $\mathbb{R}^2$).

1. *Die Summe der Punkte* $x = (x_1, x_2)$ *und* $y = (y_1, y_2)$ *des* $\mathbb{R}^2$ *ist*
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$
2. *Das Produkt der reellen Zahl* λ *mit dem Punkt* $x = (x_1, x_2)$ *ist*
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$
3. *Die Null in* $\mathbb{R}^2$ *ist* $0 = (0,0)$*; das Negative (Inverse) zu* $x = (x_1, x_2)$ *ist* $-x = (-x_1, -x_2)$.

Wir nennen das Produkt λx auch *skalares Vielfaches*, die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ auch *Skalaroperation.*

Proposition 11. (Rechengesetze für Addition und Skalaroperation). *Es seien* $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Es gilt:*

(1)	$(x+y)+z$	$=$	$x+(y+z)$
(2)	$x+y$	$=$	$y+x$
(3)	$x+0$	$=$	x
(4)	$x+(-x)$	$=$	0
(5)	$\lambda(x+y)$	$=$	$\lambda x + \lambda y$
(6)	$(\lambda+\mu)x$	$=$	$\lambda x + \mu x$
(7)	$\mu(\lambda x)$	$=$	$(\mu\lambda)x$
(8)	$1x$	$=$	x

Die Eigenschaften *(1)* - *(4)* kennen wir schon: *(1)* ist das Assoziativgesetz, *(2)* die Kommutativität, *(3)* besagt, daß die Null neutral ist, und *(4)*, daß $-x$ invers ist zu x. Diese Regeln sind genau dieselben wie die in Abschnitt 1 für die reellen Zahlen formulierten. Auch *(5)* bis *(8)* erscheinen uns bekannt, es ist hier dennoch ein Unterschied zu den Axiomen für reelle Zahlen, indem die Skalaroperation eine Zahl aus $\mathbb{R}$ mit einem Punkt aus $\mathbb{R}^2$ zu einem Punkt in $\mathbb{R}^2$ verknüpft, sodaß Objekte verschiedener Natur (Zahlen und Punkte) miteinander verschmolzen werden. Wie bei den Zahlen setzen wir

$$x - y = x + (-y)$$

und nennen diese Operation **Subtraktion**. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ gibt es ein Analogon zum Betrag einer Zahl, die Norm.

Definition 22. *Die* **euklidische Norm** *von* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *ist*

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Pythagoras' Satz zeigt: Die euklidische Norm von x ist die Distanz von x zum 'Ursprung' 0, wir können uns $||x||$ denken als die Länge eines Pfeils beginnend in 0 und endend im Punkt x. Das war beim Betrag einer Zahl auch schon so. Zudem gelten für $||x||$ Gesetze, die denen für $|\lambda|$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ähneln.

Proposition 12. (Eigenschaften der Norm). *Es seien* $x, y \in \mathbb{R}^2$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

1. $||x|| \geq 0. \quad ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Der Beweis ist elementar. Eigenschaft 3. führt auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung (siehe Übungen). Mit Hilfe der Norm ist ein Distanzbegriff in der Ebene $\mathbb{R}^2$ verfügbar.

Definition 23. *Die* **euklidische Distanz** *zweier Punkte* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *ist*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Proposition 13. *Die euklidische Distanz erfüllt die drei Eigenschaften von Proposition 10.*

Proof. $d(x, y) = ||x - y|| \geq 0$, und

$$d(x, y) = 0 \iff ||x - y|| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

nach 1. von Proposition 12. Weiters

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1| ||y - x|| = 1||y - x|| = d(y, x)$$

wegen 2. von Prop. 12. Und noch

$$d(x, z) = ||x - z|| = ||x - y + y - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z)$$

nach 3. von ebendort. □

Dieser Distanzbegriff in der Ebene befriedigt die geometrische Anschauung von 'Distanz'. Die Dreiecksungleichung besagt hier, daß bei gegebenem Dreieck (mit Eckpunkten $x, y, z \in \mathbb{R}^2$) die Länge einer Dreieckseite nicht größer sein kann als die Summe der beiden anderen.

4.3 Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$

Im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ geht alles völlig analog. Zuletzt machen wir uns ganz allgemein $\mathbb{R}^n$ zu eigen. n ist dabei eine natürliche Zahl ≥ 1.

Definition 24. *Der n-dimensionale reelle Raum ist*

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n mal}}.$$

Seine Elemente sind die n-tupel reeller Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$. Sie werden addiert und mit reellen Zahlen multipliziert gemäß

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Beim Nachrechnen der folgenden Eigenschaften dieser Operationen empfindet mancher es bequemer, die Elemente des $\mathbb{R}^n$ (die n-tupel) als Spalten anzuschreiben.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir können beide Schreibweisen verwenden. Erst wenn das Rechnen mit Matrizen ins Spiel kommt, werden Zeilen-und Spaltenschreibweise unterschieden.

Proposition 14. *Die Addition und Skalaroperation in $\mathbb{R}^n$ erfüllt alle in Proposition 11 angeführten Gesetze.*[9]

Wie in der Ebene wird nun ein Distanzbegriff definiert.

Definition 25. *Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

die **euklidische Norm***. Die* **Distanz** *zwischen Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Satz 4.

- *Die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Gesetze von Proposition 12.*
- *Die Distanz im $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Gesetze von Proposition 10.*

5 Vektorräume

In jedem $\mathbb{R}^n$ gelten - was Addition und Skalaroperation betrifft - die gleichen Gesetze. Das ist nicht verwunderlich, rechnet man doch mit reellen Zahlen, nur eben simultan in n Komponenten. Man nennt nun eine Menge, auf der eine Addition und eine Skalaroperation wie in $\mathbb{R}^n$ gegeben sind, einen (reellen) Vektorraum, wenn die Gesetze aus Proposition 11 gelten.

[9] x, y, z sind hier natürlich Elemente des $\mathbb{R}^n$.

5.1 Definition und elementare Eigenschaften

Definition 26. *Ein* **reeller Vektorraum** *ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen*

$$V \times V \xrightarrow{+} V \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V$$

wobei die folgenden Gesetze gelten:

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= x+(y+z)\\
x+y &= y+x\\
x+0 &= x\\
x+(-x) &= 0\\
\lambda(x+y) &= \lambda x + \lambda y\\
(\lambda+\mu)x &= \lambda x + \mu x\\
\mu(\lambda x) &= (\mu\lambda)x\\
1x &= x.
\end{aligned}$$

Das sind genau die Zustände in $\mathbb{R}^n$; wir können also sagen: *Der $\mathbb{R}^n$ mit seinen in Definition 24. festgesetzten Operationen ist ein reeller Vektorraum.* Und das für jedes $n \geq 1$. In $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ist das wahr, wenn man als Skalaroperation die Multiplikation wählt. Definieren wir $\mathbb{R}^0$ als den 'Punkt' $\{0\}$ und die Operationen

$$\mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0 \xrightarrow{+} \mathbb{R}^0 \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^0 \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}^0$$

auf die einzig mögliche Weise (alles wird 0), so ist auch $\mathbb{R}^0$ ein reeller Vektorraum.[10] Man nennt die Elemente eines Vektorraums **Vektoren**. Diese Bezeichnung kommt aus der Physik, wo Kräfte, Geschwindigkeiten und ähnliches die Vektorraumgesetze erfüllen; man verbindet dort mit 'Vektor' die Vorstellung einer Größe, die eine Richtung samt Orientierung sowie einen Zahlenwert (einen Betrag[=Norm]) hat. Das hat alles seine Berechtigung. Wir wollen 'Vektor' verwenden als eine Bezeichnung für Elemente eines Vektorraums. Die Punkte der reellen Ebene sind somit Vektoren, einfach deshalb, weil ihre Gesamtheit - der $\mathbb{R}^2$ - ein Vektorraum ist. Dasselbe gilt für die Elemente des $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \geq 0$, also auch für reelle Zahlen selbst. Wir gaben hier keine Definition des Begriffs 'Vektor', ebenso wie schon zuvor 'Zahl' und 'Menge' nicht definiert worden waren.

Aus den Axiomen der Definition 26 folgt unmittelbar:

Proposition 15. $\lambda x = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \vee x = 0$

5.2 Normierte Räume

Es war möglich, auf jedem $\mathbb{R}^n$ eine 'Norm' zu definieren. Hat man eine physikalisch-anschaulich motivierte Vorstellung von 'Vektor', so ist die oben definierte euklidische Norm die einzig denkbare. Es stellt sich heraus, daß es sinnvoll ist, mehr Flexibilität zuzulassen.

[10]Der Zusatz 'reell' soll ausdrücken, daß bei der Skalaroperation reelle Zahlen als 'Skalare' zum Einsatz kommen. In der *Linearen Algebra* werden Vektorräume über beliebigen Körpern (also nicht ausschließlich über dem Körper $\mathbb{R}$) thematisiert. Ein (algebraischer) Körper ist dabei eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen - Addition und Multiplikation - sodaß die Axiome der reellen Zahlen (1) bis (9) erfüllt sind (also nicht alle Axiome). Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ hat somit die Struktur eines Körpers, aber auch $\mathbb{Q}$ und viele andere mit algebraischen Operationen ausgestatteten Mengen sind Körper. Es gibt selbst endliche Körper, das sind solche, deren Trägermengen endliche Mengen sind (siehe Übungsblatt 2).

Definition 27. *Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine* **Norm** *auf V ist eine Abbildung, welche die folgenden Gesetze erfüllt.*

1. $||x|| \geq 0. \quad ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Einen Vektorraum, auf dem eine Norm gegeben ist, nennt man - zusammen mit dieser Norm - einen **normierten Raum**. Das soll heißen: wenn N auf irgend einem reellen Vektorraum V eine Norm ist, so nennen wir das Paar (V, N) einen normierten Raum. Gewöhnlich schreibt man wieder $||x||$ statt $N(x)$, wenn man weiß, mit welcher Norm man es zu tun hat. Um verschiedene Normen zu vergleichen, wird man sie unterschiedlich bezeichnen müssen; man schreibt dann etwa $||x||_1$ und $||x||_2$ oder ähnlich. Die Normen selbst - als Abbildungen - können dann geschrieben werden als $||.||_1,\ ||.||_2$. Oder aber man bezeichnet ganz gewöhnlich etwa $N(x), M(x), N_j(x), \ldots$.

Beispiel 4. *Die folgenden sind Normen auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$:*

1. $x \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$
2. $x \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j|$
3. $x \mapsto \max_{j=1}^n |x_j|$

Die erste dieser Normen ist die vertraute euklidische. Die anderen vielleicht als etwas schräg empfundenen Konstrukte sollen bald ihre Vorzüge zeigen dürfen. Für $n = 1$ fallen alle drei Normen zusammen:

$$x = (x_1) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \sqrt{x^2} = \sum_{j=1}^{1} |x_j| = \max_{1 \leq j \leq 1} |x_j| = |x|$$

Für die euklidische Norm führte $(x, y) \mapsto ||x - y||$ zum gewohnten Distanzbegriff. Was geschieht, wenn wir die gleiche Konstruktion auf die anderen Normbegriffe anwenden?

Definition 28. *Es sei $(V, ||.||)$ ein normierer Raum. Die* **von der Norm** $||.||$ **induzierte Metrik (Distanz)** *ist die Abbildung*

$$V \times V \xrightarrow{d} V,\ d(x, y) = ||x - y||.$$

Proposition 16. *Die von der Norm induzierte Metrik hat die Eigenschaften von Proposition 10.*

Der Beweis ist exakt der für Proposition 13 gegebene; es wurden dort nur die Normaxiome aus Definition 27 verwendet.

Wir haben die klassische Vorstellung von der Länge eines Vektors verallgemeinert zum Begriff der Norm eines Vektors. Die klassische Distanz zwischen zwei Punkten geht dabei über in die abstrakte Metrik. Darzulegen, daß dieses Begriffsspiel von Nutzen ist, ist ein Versprechen, das in späteren Sektionen eingelöst werden sollte.

6 Metrische Räume

Es ist manchmal einfacher, sich von Ballast zu lösen, selbst dann, wenn dieser seine Vorzüge hat. Obwohl wir hier nicht vorhaben zu viel über Punktmengen zu reden, die nicht aus reellen Vektorräumen stammen, so soll doch das Distanzkonzept von der Norm befreit und damit verallgemeinert werden.

6.1 Definition und Beispiele

Definition 29. *Es sei X eine Menge. Eine* **Metrik** *auf X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ welche die Eigenschaften*

1. $d(x,y) \geq 0.\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

*erfüllt. Das Paar (X,d) heißt dann ein **metrischer Raum**.*

Beispiel 5.

1. (R^n, d_1) *mit* $d_1(x,y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$;
2. (R^n, d_2) *mit* $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$;
3. (R^n, d_3) *mit* $d_3(x,y) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - y_j|$;
4. (V,d), *wo* $(V, ||.||)$ *normierter Raum und* $d(x,y) = ||x-y||$

sind alles metrische Räume; wissen wir schon. Aber auch:

1. (X,d), *wo X beliebige Menge,* $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Diese letzte Metrik, welche es auf jeder Menge gibt, nennt man **diskrete Metrik**, das Paar (X,d) einen **diskreten metrischen Raum**. Der nächste Hilfssatz folgt direkt aus der Dreiecksungleichung.

Lemma 1. *(X,d) metrischer Raum, $x,y,z \in X$. Dann gilt*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Teilmengen metrischer Räume sind in natürlicher Weise metrisch.

Definition 30. *Es sei (X,d) metrisch, $Y \subseteq X$. Dann ist $d|_{Y\times Y}$ eine Metrik auf Y. Das Paar $(Y, d|_{Y\times Y})$ heißt **Teilraum von** X (mit Trägermenge Y).*

Im restlichen Teil dieses Abschitts verfeinern wir die angekündigte geometrische Sprache. Erst einmal sagen wir ‘Punkt’ zu allem, was Element eines metrischen Raums ist. Jetzt wollen wir Kugeln haben.

6.2 Kugeln, Sphären

Definition 31. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ ein Punkt, $r > 0$ (also eine positive reelle Zahl).*

- *Die **offene Kugel um** a **mit Radius** r ist die Menge*
$$K_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\};$$
- *Die **abgeschlossene Kugel um** a **mit Radius** r ist die Menge*
$$K'_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\};$$
- *Die **Sphäre um** a **mit Radius** r ist die Menge*
$$S_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

Beispiel 6.

1. *<u>R^3 mit euklidischer Metrik:</u> die offene Kugel mit Radius r um a ist eine Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r im anschaulichen Sinn, nur ohne 'Rand'. Die abgeschlossene Kugel $K'_r(a)$ ist die Kugel mit Rand, die Sphäre $S_r(a)$ ist der Rand; es ist die Lösungsmenge der Gleichung*
$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2.$$
2. *<u>R^2 mit euklidischer Metrik:</u> die offene Kugel mit Radius r um a ist ein offener Kreis mit Mittelpunkt a und Radius r (ohne Rand). Die abgeschlossene Kugel $K'_r(a)$ ist der Kreis mit Rand, die Sphäre $S_r(a)$ ist die Kreislinie*
$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2.$$
3. *<u>R^1 mit euklidischer Metrik:</u> $K_r(a) = (a - r, a + r)$ ein offenes Intervall; $K'_r(a) = [a - r, a + r]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Die Sphäre $S_r(a) = \{a - r, a + r\}$ besteht aus zwei Punkten.*
4. *<u>(R^2, d_1)</u> wo $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$: $K_r(a)$ ist ein offenes, $K'_r(a)$ ein abgeschlossenes, auf der Spitze stehendes Quadrat, $S_r(a)$ ist dessen Rand (der den Rand des Quadrats ausfüllende Streckenzug). Man sieht das alles am besten für den Punkt $a = 0$, die Formeln für die Distanz werden dann einfacher.*
5. *<u>(R^2, d_3)</u> wo $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$: $K_r(0)$ ist das offene, $K'_r(0)$ das abgeschlossene achsenkonforme Quadrat, $S_r(0)$ sein Rand.*
6. *<u>(R^3, d_1)</u> mit $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$: Jetzt entstehen Oktaeder. $S_1(0)$ ist die Oktaederfläche mit den Eckpunkten*
$$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (-1, 0, 0),\ (0, -1, 0),\ (0, 0, 1),\ (0, 0, -1).$$
7. *<u>$(\mathbb{R}^3, d_3)$</u> mit $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}$: Ergibt Würfel. $S_1(0)$ ist der achsenparallele Würfel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Kantenlänge 2.*

8. *$X \neq \emptyset$ (irgend eine nichtleere Menge) mit diskreter Metrik: Je zwei verschiedene Punkte haben Distanz 1. Die offene Kugel $K_1(a)$ besteht aus allen Punkten mit Distanz zu $a < 1$. Da gibt es nur einen: a; also $K_1(a) = \{a\}$ ein einzelner Punkt. Aber auch $K_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$. Wir sehen, daß - in allgemeinen metrischen Räumen - der Radius einer Kugel nicht eindeutig durch diese Kugel bestimmt sein muß. Außerdem*

$$K'_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\} = K_{\frac{1}{2}}(a),\ S_{\frac{1}{2}}(a) = \emptyset,\ K'_1(a) = X,\ S_1(a) = X \setminus \{a\}.$$

Eine Kugel determiniert auch nicht zwingend ihren Mittelpunkt, da doch e.g. $K'_1(a) = X = K'_1(b)$.

Die offene Kugel in $\mathbb{R}$ mit Mittelpunkt a und Radius r ist also das offene Intervall $(a-r, a+r)$, die abgeschlossene Kugel $K'_r(a)$ ist das abgeschlossene Intervall $[a-r, a+r]$.[11] In $\mathbb{R}$ ist jedes nichttriviale offene (abgeschlossene) Intervall eine offene (abgeschlossene) Kugel:

$$(u, v) = \left(\frac{u+v}{2} - \frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2}\right) = K_{\frac{v-u}{2}}\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Das Beispiel des diskreten Raums zeigt, daß die naive Anschauung alleine nicht ausreicht, sobald es an abstrakte Metriken geht. Dieses Beispiel ist aber für analytische Situationen völlig untypisch. Im allgemeinen wird man von geometrischer Vorstellung sehr gut geleitet.

In Definition 30 wurden beliebige Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) selbst wieder zu metrischen Räumen gemacht. Das geschah einfach dadurch, daß für je zwei Punkte x, y in einer Teilmenge $A \subseteq X$ schon eine Distanz gegeben ist, nämlich $d(x, y)$ (x, y sind ja auch in X). Die Kugeln im Teilraum sehen manchmal etwas abgefressen aus.

Proposition 17. *(X, d) metrischer Raum, $A \subseteq X$, $a \in A$, $\varepsilon > 0$. Die offene (abgeschlossene) Kugel um a mit Radius ε im Teilraum $(A, d|_{A \times A})$ ist $K_\varepsilon(a) \cap A$ ($K'_\varepsilon(a) \cap A$). die Sphäre um a mit Radius ε im Teilraum $(A, d|_{A \times A})$ ist $S_\varepsilon(a) \cap A$.*[12]

Proof. Die offene Kugel um a in A ist

$$\{x \in A \mid d|_{A \times A}(x, a) < \varepsilon\} = \{x \in A \mid d(x, a) < \varepsilon\} = K_\varepsilon(a) \cap A$$

Bei den anderen ist es dasselbe. □

Beispiel 7. *In den folgenden Beispielen ist immer ein metrischer Raum X mit Teilraum $A \subseteq X$ und ein Punkt $a \in A$ gegeben. $K_r(a)$ ist die offene Kugel in X, $K_r^A(a)$ diejenige in A. Analog für abgeschlossene Kugeln und Sphären.*

1. $(0, 1] \subset \mathbb{R}$. $K_{\frac{1}{2}}^{(0,1]}(1) = (\frac{1}{2}, 1]$

2. $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0\} \subset \mathbb{R}$. $K_{\frac{1}{2}}^A(1) = K_{\frac{1}{4}}^A(1) = \{1\}$, $K_{\frac{1}{2}}^A(\frac{1}{2}) = A \setminus \{1\}$, $K_{\frac{1}{4}}^A(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$, $K_1^A(\frac{1}{2}) = A$.

[11] Wenn wir ab jetzt von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^1$ sprechen, meinen wir immer den metrischen Raum mit euklidischer Metrik $d(x, y) = |x - y|$

[12] $K_\varepsilon(a)$ etc. sind hier die Kugeln etc. im großen Raum (X, d).

3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *mit euklidischer Metrik.* $K_1^A(0)$ *ist ein halber Kreis vom Radius* 1 *ohne die Kreislinie, aber mit der Strecke* $\{0\} \times (-1,1)$.

4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ *mit Metrik* $d(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2\}$. $K_1^A(0) = [0,1) \times (-1,1)$.

5. $A = \mathbb{R}\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ *(A ist die "x-Achse") mit irgendeiner der drei erwähnten Metriken ($\neq$ diskrete Metrik).* $S_1^A(0) = \{(-1,0),(1,0)\}$.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir substantielle Mengen in metrischen Räumen.

6.3 Offene Mengen - abgeschlossene Mengen

Definition 32. *Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt* **offene Menge**, *wenn es um jeden Punkt $a \in A$ eine offene Kugel $K_r(a)$ mit $r > 0$ gibt, sodaß $K_r(a) \subseteq A$.*

Beispiel 8.

1. *in $\mathbb{R}$: Offene Intervalle (u,v) sind offene Mengen: Wenn $a \in (u,v)$, dann gilt $u < a < v$. Für $r = \min\{a-u, v-a\}$ gilt $K_r(a) = (a-r, a+r) \subseteq (u,v)$.*

   Die Vereinigung offener Intervalle $A = \bigcup_i (a_i, b_i)$ ist ebenfalls offen. Wenn zwei offene Intervalle einen Punkt gemeinsam haben, ist ihre Vereinigung wieder ein offenes Intervall. Daher ist A die Vereinigung disjunkter offener Intervalle. Jeder Punkt $a \in A$ ist in einem dieser (Teil-)Intervalle von A und man findet eine offene Kugel um a (ein offenes Intervall mit Mittelpunkt a), das ganz in diesem Teilintervall liegt.[13] $\mathbb{R}$ selbst ist offen. Das abgeschlossene Intervall $[u,v]$ ist NICHT offen, man findet keine ganz in $[u,v]$ liegende offene Kugel um u (und auch keine um v). Auch halboffene Intervalle wie $(1,2]$ sind NICHT offen.

2. *in $\mathbb{R}^2$ mit euklidischer Metrik: Offene Rechtecke, Offene Kreise[14], R^2 sind offen. NICHT offen: Geraden, Strecken, Kurven,...*

3. *in $\mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik: Offene Quader, offene Kugeln, R^3, alles offen. Aber NICHT: offene Rechtecke, offene Kreisscheiben, Geraden, Kurven.*

4. *in X mit diskreter Metrik: Jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist offen.*

Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit euklidischer Metrik) ist offen, wenn um jeden ihrer Punkte "Platz" ist (in der Dimension des umgebenden Raums). Offene Mengen sind quasi "materiell". Flächen, Kurven im $\mathbb{R}^3$ - das sind Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, die nicht offen sind - sind "unendlich dünn" (so eine Art Geister).

[13] Die Feststellung, daß A aus disjunkten Teilintervallen bestehen muß, ist für obige Argumentation unwesentlich, das muß einem gar nicht auffallen. Es dient einfach der Anschaulichkeit der Situation. Tatsächlich ist jede offene Menge in $\mathbb{R}$ Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen. Abzählbar deshalb, weil in jedem offenen Intervall eine rationale Zahl liegt.

[14] Mit 'offenes Rechteck' meinen wir ein Rechteck ohne Rand, das gleiche für 'offener Kreis' etc. Wir haben das nicht eigens definiert. Die Aussage des Beispiels ist: Das war auch nicht nötig; alle diese unscharf 'offen' bezeichneten geometrischen Gebilde erweisen sich als OFFEN in obigem präzise definierten Sinn.

Ganz wichtig: Die Eigenschaft einer Menge $A \subseteq X$, offen zu sein oder nicht, hängt von der Metrik ab. In $\mathbb{R}$ mit diskreter Metrik ist jede Menge offen, in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik ist das falsch. Die Phrase 'A ist offen' macht nur Sinn, wenn klar ist, wo A offen ist, welcher der metrische Raum ist, in dem A eine offene Menge ist.

Satz 5. *Die Gesamtheit aller offenen Mengen des metrischen Raumes (X, d) hat folgende Eigenschaften.*

1. *X ist offen; $\emptyset$ ist offen.*
2. *A offen und B offen $\Rightarrow A \cap B$ offen.*
3. *A_i offen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ offen.*

Proof. Daß eine Menge $A \subseteq X$ offen ist, bedeutet, daß es um jeden ihrer Punkte eine offene Kugel gibt, die diesen Punkt zum Mikttelpunkt hat und ganz in A liegt. Für den ganzen Raum X ist das klar: zu $a \in X$ ist jede Kugel um a geeignet, da doch $K_r(a) \subseteq X$.

Daß die leere Menge immer offen ist, kommt von der sprachlichen Festsetzung des "ex falso quodlibet". $\emptyset$ hat gar keine Punkte, also trifft jede Eigenschaft von Mengen, welche für irgendeine Menge genau dann gilt, wenn irgend eine Anforderung von all deren Elementen befriedigt wird, auf sie zu. Das gleiche ex falso quodlibet ist auch dafür verantwortlich, daß überhaupt $\emptyset \subseteq X$ gilt.

Wenn nun A und B offen in X sind und $x \in A \cap B$, so $\exists \delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subseteq A$ und $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq B$. Mit $r := \min\{\delta, \varepsilon\}$ gilt dann $K_r(x) \subseteq K_\delta(x) \cap K_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$.

Sei schließlich $x \in \bigcup_i A_i$, wobei alle A_i offen sind. Dann ist x in mindestens einem A_{i_0}, das dann - weil es offen ist - ein $K_\epsilon(x)$ enthält. Es folgt

$$K_\epsilon(x) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_i A_i.$$

□

Aus Punkt 2. folgt, daß der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen ist. Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen muß nicht offen sein.

Beispiel 9. $\bigcap_{n>0}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$, *was nicht offen ist.*

Definition 33. *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt* **abgeschlossen**, *wenn ihr Komplement in X offen ist.*

Ist (X, d) metrisch, $A \subseteq X$, so gilt A abgeschlossen $\iff$ A^c offen. Wegen $(A^c)^c = A$ gilt auch

$$A \text{ offen} \iff A^c \text{ abgeschlossen.}$$

Jeder Punkt - das heißt, jede einelementige Menge - $\{x\}$ ist abgeschlossen.

Satz 6. *Die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen des metrischen Raumes (X, d) hat folgende Eigenschaften.*

1. *X ist abgeschlossen; $\emptyset$ ist abgeschlossen.*

2. A abgeschlossen und B abgeschlossen $\Rightarrow A \cup B$ abgeschlossen.

3. A_i abgeschlossen $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Proof. Mit De Morgan aus Satz 5. $\square$

Proposition 18. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Offene Kugeln sind offen. Abgeschlossene Kugeln und Sphären sind abgeschlossen.*

Proof.

1. Sei $x \in K_r(a)$. Das heißt $d(x, a) < r$ und somit $\varepsilon := r - d(x, a) > 0$. Wir zeigen, daß $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$. Wenn das gelungen ist, haben wir also um jeden Punkt x in $K_r(a)$ eine offene Kugel gefunden, die ganz in $K_r(a)$ liegt (um jeden Punkt x deshalb, weil x völlig beliebig gewählt war), das heißt, $K_r(a)$ ist offen.

   Wir wählen ein beliebiges $y \in K_\varepsilon(x)$. Dann gilt $d(y, x) < \varepsilon = r - d(x, a)$, und daher $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r$. Das bedeutet $y \in K_r(a)$. Weil y beliebig gewählt war, gilt für alle y

   $$y \in K_\varepsilon(x) \;\Rightarrow\; y \in K_r(a)$$

   also $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$, was wir zeigen sollten.

2. Zu zeigen, daß $K'_r(a)$ abgeschlossen ist, bedeutet zu zeigen, daß $K'_r(a)^c = X \setminus K'_r(a)$ offen ist. Sei also $x \in K'_r(a)^c$. Dann ist nicht $d(x, a) \leq r$, also $d(x, a) > r$ und so $\varepsilon := d(x, a) - r > 0$. Wir zeigen, daß $K_\varepsilon(x) \subseteq K'_r(a)^c$: Wähle $y \in K_\varepsilon(x)$, also $d(y, x) < \varepsilon = d(x, a) - r$. Daher mit Hilfe von Lemma 1

   $$r < d(a, x) - d(y, x) \leq |d(a, x) - d(y, x)| \leq d(a, y)$$

   das bedeutet, $\neg d(y, a) \leq r$ also $\neg y \in K'_r(a)$ und somit $y \in K'_r(a)^c$. Insgesamt: $K_\varepsilon(x) \subseteq K'_r(a)^c$.

3. Wegen $K'_r(a)$ abgeschlossen, ist $K'_r(a)^c$ offen. Weil auch $K_r(a)$ offen, folgt $K'_r(a)^c \cup K_r(a)$ offen, und so $(K'_r(a)^c \cup K_r(a))^c$ abgeschlossen. Diese letzte Menge ist aber identisch mit $S_r(a)$.

$\square$

Proposition 19. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede offene Menge in X ist Vereinigung offener Kugeln.*

Proof. Sei $A \subseteq X$ offen. $\forall a \in A \exists \varepsilon_a > 0$ $(K_{\varepsilon_a}(a) \subseteq A)$, daher gilt

$$\bigcup_{a \in A} K_{\varepsilon_a}(a) = A.$$

$\square$

Die offenen Mengen in X sind genau die Mengen, die sich als Vereinigung offener Kugeln darstellen lassen.

Beispiel 10.

1. *in* $\mathbb{R}$*:*
   (a) $[a, b]$ *ist die abgeschlossene Kugel* $K'_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$ *also abgeschlossen.*
   (b) $\{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ *ist abgeschlossen.*
   (c) *Sphären sind zweipunktige Mengen. Daß diese abgeschlossen sind war schon klar.*
2. *in* $\mathbb{R}^2$ *mit euklidischer Metrik:*
   (a) *Geraden und Kurven sind abgeschlossen.*
   (b) *Abgeschlossene Kreisscheiben sind abgeschlossene Kugeln also abgeschlossen. Kreislinien sind Sphären: auch abgeschlossen!*
3. *in* $\mathbb{R}^2$ *mit Metrik* $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$*: Abgeschlossene Quadrate sind abgeschlossene Kugeln, daher abgeschlossen. Der "Rand" eines Quadrats ist eine Sphäre, also abgeschlossen.*
4. *in* $\mathbb{R}^3$ *mit euklidischer Metrik: Abgeschlossene Kugeln im anschaulichen Sinn sind genau die abgeschlossenen Kugeln im Sinn der Metrik; das Gleiche gilt für Sphären. Diese Mengen sind also abgeschlossen. Aber auch Geraden, Kurven, Ebenen, Flächen und irgendwie im Raum schwebende Kreisscheiben (mit Rand) sind abgeschlossen.*

Die Loslösung von der euklidischen Norm - ihre Verallgemeinerung zum abstrakten Normbegriff - schließlich die weitere Abstraktion zum Konzept des metrischen Raums bringen nicht nur größere Allgemeinheit und damit einen weiteren Anwendungssbereich der Theorie[15], sondern vor allem eine konzeptionelle Einfachheit, die in geometrischer Sprechweise den Blick auf das Wesentliche freihält.

6.4 Zusammenhang

Eine Teilmenge eines metrischen Raums muß nicht offen oder abgeschlossen sein, es gibt Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

1. $[a, b) \subset \mathbb{R}$ und auch $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
2. offene Kreisscheibe mit halbem Randkreis in $\mathbb{R}^2$; z.B.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Es gibt Mengen, die offen UND abgeschlossen sind.

Proposition 20. (X, d) *metrischer Raum.*

- *Der gesamte Raum* X *ist offen und abgeschlossen.*
- $\emptyset$ *ist offen und abgeschlossen.*

[15] Das ist jetzt - gutmütig interpretiert - übertrieben. Man kann zeigen, daß jeder metrische Raum isometrisch in einen normierten Vektorraum einbettbar ist. Isometrisch heißt, bei gleichem Distanzbegriff. So viel allgemeiner als normierte Vektorräume sind die metrischen Räume also nicht. Der Vektorraum, welcher hier bei vorgelegtem metrischen Raum zum Einsatz kommt, kann sehr hohe (unendliche) Dimension haben.

Aber manchmal auch noch andere:

Beispiel 11.

1. *$X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ als Teilraum von $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^+ \subset X$ ist offen; $\mathbb{R}^-$ auch. $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^-)^c$ (in X). Also ist $\mathbb{R}^+$ abgeschlossen in X. $\mathbb{R}^-$ auch.*

2. *Zwei disjunkte abgeschlossene Kreisscheiben:*
$$X = K'_{\frac{1}{2}}(-1,0) \cup K'_{\frac{1}{2}}(1,0)$$
als Teilraum von $\mathbb{R}^2$ mit z.B. euklidischer Metrik. Jede der beiden Kugeln ist abgeschlossen - und weil sie disjunkt sind - auch offen.

3. *Das gleiche passiert bei zwei disjunkten offenen Kreisscheiben; z.B.*
$$X = K_1(-1,0) \cup K_1(1,0) \text{ als Teilraum von } \mathbb{R}^2.$$

4. *Und genauso: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + y^2 < 1\}$ als Teilraum von $\mathbb{R}^2$.*

5. *$X = \bigcup_{n>0} K_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(n,n,n)$ als Teilraum von $\mathbb{R}^3$ mit euklidischer Metrik. Jede einzelne Kugel ist offen in X. Ihr Komplement in X ist die Vereinigung aller anderen offenen Kugeln, also auch offen. Daher ist jede einzelne Kugel auch abgeschlossen.*

All diesen Beispielen ist gemeinsam, daß der metrische Raum X irgendwie aus nicht nur einem Teil besteht: X ist nicht zusammenhängend.

Definition 34. *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* ***zusammenhängend****, wenn X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

Es hat sich in Teilen der angelsächsischen Literatur das Wort 'clopen' eingenistet, für solche Mengen, die abgeschlossen und offen sind. Wenn man es verwenden mag, dann kann man die Definition von 'Zusammenhang' so fassen:

Ein metrischer Raum (X,d) heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen clopens in X sind.

Die Räume X aus Example 11 sind also nicht zusammenhängend. Wie ist es mit den euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$? Man hat das Gefühl, daß die zusammenhängend sein sollten. Und das ist auch so. Wir beweisen das hier für $n = 1$. Daß $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend $\forall n \in \mathbb{N}$, wird in einer späteren Sektion gezeigt.

Satz 7. *Die zusammenhängenden Teilräume von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.*

Und zwar offene, abgeschlossene und halboffene, auch uneigentliche - solche, die irgendwo beginnen und nie mehr enden, oder ganz $\mathbb{R}$. Man bündelt alle diese Mengen unter dem Begriff 'Intervall':

Definition 35. *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* ***Intervall****, wenn*
$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ (x < y < z \wedge x \in A \wedge z \in A \;\Rightarrow\; y \in A).$$

Proof. (Von Satz 7.) Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend (als Teilraum von $\mathbb{R}$). Weiters seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y < z$ und $x, z \in X$. Angenommen $y \notin X$. Dann ist

$$X \subseteq \mathbb{R} \setminus \{y\} = \underbrace{\{u \in \mathbb{R} \mid u < y\}}_{U} \cup \underbrace{\{u \in \mathbb{R} \mid u > y\}}_{V} \quad \text{und daher}$$

$$X = X \cap (U \cup V) = (X \cap U) \cup (X \cap V).$$

$X \cap U$ und $X \cap V$ sind offen in X, nichtleer ($x \in X \cap U$, $z \in X \cap V$) und weiters ist $X \cap U \cap X \cap V = \emptyset$, das heißt, $X \cap U$ ist das Komplement von $X \cap V$ und umgekehrt. Damit wäre dann X nicht zusammenhängend, ein Widerspruch. Also ist X ein Intervall.

Sei jetzt umgekehrt X ein Intervall. Angenommen, X ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es echte clopens in X, also

$$X = U \cup V,\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ \text{beide offen in } X,\ \text{und}\ \ U \cap V = \emptyset.$$

$\exists u \in U$ und $\exists v \in V$. Da $U \cap V = \emptyset$, gilt $u \neq v$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $u < v$. Die zentrale Beobachtung ist:

$$x \in U \ \Rightarrow\ \exists \text{ offenes Intervall } I \neq \emptyset \text{ zentriert um } x,\ \text{mit } I \cap V = \emptyset. \tag{6}$$

`Denn`: es gibt eine in X offene Kugel um x ganz in U:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ mit } K_\varepsilon^X(x) \subseteq U.$$

Kugeln in X sind Schnitte von Kugeln in $\mathbb{R}$ mit X, also $K_\varepsilon^X(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X = I \cap X$. Somit $I \cap V \subseteq I \cap X \subseteq U$. Natürlich auch $I \cap V \subseteq V$, also $I \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$. Analog: $x \in V \ \Rightarrow\ \exists$ Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ welches U nicht schneidet.

Sei nun $A = \{x \in X \mid u \leq x \wedge [u, x] \subseteq U\}$. Es gilt $u \in A \subseteq U$ und $\forall x \in A\ (x < v)$. Die Menge A ist also nichtleer und durch v oben beschränkt, hat daher eine kleinste obere Schranke $s = \sup\ A$. Es ist $u \leq s \leq v$ also[16] $s \in X$, und so $s \in U \vee s \in V$. Wir zeigen einfach, daß beide Altenativen nicht sein können, dann muß die ursprüngliche Annahme falsch sein, d.h., X ist doch zusammenhängend. Zuvor noch

$$z \in [u, s) \ \Rightarrow\ \exists x \in A\ (z < x),\ u \leq z < x,\ z \in [u, x] \subseteq U,\ z \in U$$

für beliebiges z, d.h. es ist $[u, s) \subseteq U$.

Angenommen $s \in U$. Wegen (6) $\exists \varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap V = \emptyset$. Es ist $s < v$ (andernfalls wäre $s = v \in V$), daher gibt es ein y zwischen s und der kleineren von $s + \varepsilon$ und v: $\exists y\ (s < y < \min\{s + \varepsilon, v\})$. Für beliebiges z, $s \leq z \leq y \ \Rightarrow\ z \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ und deshalb $z \notin V$; aber $z \in X$ (weil zwischen s und y, und die zwei sind in X), und so muß z in U sein. Es folgt $[s, y] \subseteq U$, also

$$[u, y] = [u, s) \cup [s, y] \subseteq U.$$

Damit ist $y \in A$ und so $y \leq s = \sup\ A$, aber y ist doch $> s$. Das geht schon mal nicht.

[16] hier kommt die Eigenschaft von X ein Intervall zu sein ins Spiel: $u, v \in X,\ u \leq s \leq v$ also $s \in X$.

Angenommen nun, daß $s \in V$. Wieder nach (6) $\exists \varepsilon > 0$ mit $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap U = \emptyset$. Jetzt ist $u < s$ (sonst $s = u \in U$).

$$\exists y \text{ mit } \max\{s-\varepsilon, u\} < y < s.$$

Da y nicht obere Schranke von A sein kann, $\exists x \in A$ mit $x > y$, also $u < y < x$, $y \in [u, x] \subseteq U$ und auch $y \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, Widerspruch! □

Beispiel 12.

1. *$\mathbb{R}$ ist ein Intervall, also zusammenhängend.*
2. *Räume in Ex 11 sind NICHT zusammenhängend.*
3. *$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 < 1\}$ ist zusammenhängend!*
4. *$\mathbb{Q}$ NICHT zusammenhängend: $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$.*

6.5 Umgebungen, Berührungspunkte, Innere Punkte und Häufungspunkte

Definition 36. *X metrischer Raum, $x \in X$ ein Punkt. $U \subseteq X$ heißt* **Umgebung von** *x wenn $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq U$.*

Proposition 21 (Umgebungseigenschaften).

1. *U Umgebung von x und $U \subseteq V \subseteq X \Rightarrow V$ Umgebung von x.*
2. *U, V Umgebungen von $x \Rightarrow U \cap V$ Umgebung von x.*
3. *U Umgebung von $x \Rightarrow x \in U$.*
4. *U Umgebung von $x \Rightarrow \exists$ Umgebung V von x sodaß U Umgebung jedes Punktes aus V.*

Proof. 1. und 2. sind offensichtlich; zu 3.: $\exists \varepsilon > 0$ $(K_\varepsilon(x) \subseteq U$ und $\exists \delta > 0$ $(K_\delta(x) \subseteq V$, dann ist $K_{\min\{\varepsilon,\delta\}}(x) \subseteq U \cap V$. Zu 4.: $\exists \varepsilon > 0$ $(K_\varepsilon(x) \subseteq U$. Die Kugel $K_\varepsilon(x)$ ist auch Umgebung von x. Mehr noch, sie ist offen, also $\forall y \in K_\varepsilon(x) \exists \delta > 0$ sodaß $K_\delta(y) \subseteq K_\varepsilon(x) \subseteq U$. So ist also U Umgebung jedes Punktes aus $K_\varepsilon(x)$. □

Das Zusammenspiel der Begriffe 'offen' und 'Umgebung':

Lemma 2. *X metrischer Raum, $x \in X$, $U \subseteq X$.*

- *U offen $\Leftrightarrow U$ Umgebung jedes ihrer Punkte*
- *U Umgebung von $x \Leftrightarrow \exists G \subseteq X$ offen mit $x \in G \subseteq U$.*

Proof.

1. Wenn die Menge U offen ist, enthält sie um jeden ihrer Punkte x eine Kugel $K_r(x)$, ist somit Umgebung jedes ihrer Punkte. Umgekehrt, falls U Umgebung aller ihrer Punkte ist, gibt es zu jedem $x \in U$ ein $K_{r_x}(x) \subseteq U$, damit ist dann $U = \bigcup_{x \in U} K_{r_x}(x)$ eine Vereinigung offener Kugeln, also offen.

2. U Umgebung von x bedeutet: es gibt eine Kugel $K_r(x) \subseteq U$; diese Kugel ist eine offene Menge. Umgekehrt, $x \in G \subseteq U$ und G offen. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq G \subseteq U$, d.h., U ist Umgebung von x.

□

Eine auf einer Menge X gegebene Metrik erlaubt es, Aussagen über die gegenseitige Postition von Punkten aus X, und auch über Beziehungen zwischen Punkten und Teilmengen von X zu machen. Für die meisten Anwendungen ist nicht die Metrik selbst, sondern das System offener Mengen, welches sie definiert, relevant. Wir werden später Metriken, die das gleiche System offener Mengen erzeugen, als gleichberechtigt ansehen und gegebenenfalls gegeneinander austauschen (wenn wir meinen, etwas davon zu haben). Nach Lemma 2 ist die Menge aller offenen Mengen (die **Topologie**) eines metrischen Raumes X eng verknüpft mit dem System aller Umgebungen von Punkten von x. Wir formulieren nun qualitative (Metrik unabhängige) Beziehungen von Punkten und Mengen.

Definition 37. *X metrischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.*

1. *x heißt* **Berührungspunkt von** *A wenn jede Umgebung von x A schneidet (nichtleer!)*

2. *x heißt* **innerer Punkt von** *A wenn A Umgebung von x ist.*

3. *x heißt* **äusserer Punkt** *von A wenn x innerer Punkt von A^c ist.*

4. *x ist* **Randpunkt** *von A wenn x Berührungspunkt von A und von A^c ist.*

5. *x heißt* **Häufungspunkt** *von A wenn jede Umgebung von x die Menge A in (mindestens) einem von x verschiedenen Punkt schneidet.*

Beispiel 13.

1. *Jedes $\frac{1}{n}$ ist Berührungspunkt von $A = \{\frac{1}{n} \mid n > 0\} \subset \mathbb{R}$, aber auch 0 ist Berührungspunkt von A. Innere Punkte hat A keine.*

2. *Sei $A = K_1(0,0) \subseteq \mathbb{R}^2$. Jeder Punkt in A ist innerer Punkt von A, Berührungspunkte von A sind die Punkte in A selbst und die Punkte auf dem Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Die äußeren Punkte von A sind genau die Punkte (x,y) mit $x^2 + y^2 > 1$. Randpunkte sind die Punkte auf dem Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.*

3. *$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ hat keine inneren Punkte (es gibt keine offenen Intervalle, die nur rationale Zahlen enthalten; das müßte es aber, wenn irgend ein $x \in \mathbb{R}$ innerer Punkt von $\mathbb{Q}$ wäre). $\mathbb{Q}$ hat auch keine äußeren Punkte (dasselbe Argument). Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Randpunkt von $\mathbb{Q}$.*

Definition 38. *X metrischer Raum, $A \subseteq X$.*

$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ ist Berührungspunkt von } A\}$	**Abschluß von** A
$A^\circ = \{x \in X \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$	**Inneres von** A
$\dot{A} = \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } A\}$	**Rand von** A

Lemma 3. *X metrisch, $A \subseteq X$.*

1. $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$

2. $\overline{A}$ *ist der Durchschnitt aller A enthaltenden abgeschlossenen Mengen.*

$$\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq X \mid C \text{ abgeschlossen} \wedge C \supseteq A\}$$

3. A° *ist Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen.*

$$A^\circ = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen} \wedge U \subseteq A\}$$

4. $A^\circ = \overline{A^c}^{\,c}$ und $\overline{A} = A^{c\circ c}$

5. $\dot{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

Falls eine Teilmenge A eines metrischen Raums X als Teilraum betrachtet wird, d.h., wenn man die Menge A mit der Metrik ausstattet, die durch Einschränkung der Metrik $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $A \times A \subseteq X \times X$ resultiert, dann wissen wir schon, daß Kugeln im Teilraum A genau die Schnitte der Kugeln in X mit der Menge A sind,

$$K_\varepsilon^A(a) = K_\varepsilon(a) \cap A \qquad (a \in A).$$

In welcher Verhältnis stehen nun die topologischen Begriffe im Teilraum A zu denen in X?

Satz 8. *Sei A Teilraum des metrischen Raumes X.*

- *Die Umgebungen eines Punktes $a \in A$ in A sind genau die Schnitte der Umgebungen von a in X mit A.*
- *Die offenen Mengen in A sind genau die Schnitte offener Mengen aus X mit A.*
- *Die abgeschlossenen Mengen in A sind genau die Schnitte abgeschlossener Mengen aus X mit A.*

7 Stetige Abbildungen

Definition 39. *Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Rümen.*

$$f \textbf{ stetig in } x \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } f(K_\delta(x)) \subseteq K_\varepsilon(f(x))$$

f heißt **stetig** *(auf X), wenn f stetig in x $\forall x \in X$.*

Falls f nicht stetig im Punkt x ist, sagt man, f sei in x **unstetig**.

Lemma 4. *X, Y metrisch, $f\colon X \longrightarrow Y$, $x \in X$. Äquivalent sind:*

1. *f stetig in x.*
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u \in X\ (d(u, x) < \delta \Rightarrow d(f(u), f(x)) < \varepsilon)$.
3. *$\forall$ Umgebung V von $f(x)$ $\exists$ Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$.*
4. *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist Umgebung von x.*

Proof. 2. ist eine Umformulierung der Definition 39, also 2. $\leftrightarrow$ 1. Ist V eine Umgebung von $f(x)$, so $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Falls f stetig in x, gibt es also ein $\delta > 0$ mit $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Die Kugel $K_\delta(x)$ ist selbst Umgebung von x, also folgt 3. aus 1. Wenn umgekehrt 3. vorausgesetzt wird, dann gibt es - da Kugeln spezielle Umgebungen (aller ihrer Punkte - also auch ihrer Mittelpunkte) sind, zu jeder Kugel $K_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq K_\varepsilon(f(x))$. U enthält eine gewisse Kugel $K_\delta(x)$, also gilt $f(K_\delta(x)) \subseteq f(U) \subseteq K_\varepsilon(f(x))$, d.h., f ist stetig in x, also 1. Die Äquivalenz 3. $\leftrightarrow$ 4. ist gleichermaßen offenbar. □

Beispiel 14 (Stetige Abbildungen).

1. $\mathrm{id}\colon X \longrightarrow X$ *ist stetig. Für jeden Punkt* $x \in X$ *und beliebiges* $\varepsilon > 0$ *ist* $\mathrm{id}(K_\varepsilon(x)) = K_\varepsilon(\mathrm{id}(x))$, *man kann also* $\delta = \varepsilon$ *wählen.*

2. $f\colon X \longrightarrow Y$ *konstante Abbildung,* $f(x) = c\ \forall x$. *Ist stetig: ganz gleich, welchen Punkt* $x \in X$ *man nimmt, der Funktionswert ist immer* c. *Sei also* $\varepsilon > 0$. *Wähle* $\delta > 0$ *beliebig. Dann wird jedes* $z \in X$, *also auch jedes* $z \in K_\delta(x)$ *nach* $K_\varepsilon(f(x))$ *abgebildet.*

3. $A \subseteq X$. *Die Inklusion* $A \xrightarrow{i} X$ *ist stetig. Die offene* ε*-Kugel um einen Punkt* $x \in A$ *in* A *ist doch* $K_\varepsilon^A(x) = K_\varepsilon(x) \cap A$. *Also ist*
$$i(K_\varepsilon^A(x)) = i(K_\varepsilon(x) \cap A) = K_\varepsilon(x) \cap A \subseteq K_\varepsilon(i(x)).$$

4. X *diskreter Raum,* Y *beliebig. Dann ist jede Abbildung* $f\colon X \longrightarrow Y$ *stetig. Für jeden Punkt* $x \in X$ *ist die Einerklasse* $\{x\}$ *eine offene Kugel um* x, *z.B.* $\{x\} = K_1(x)$. *Also gilt* $f(K_1(x)) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq K_\varepsilon(f(x))$ *für jedes* $\varepsilon > 0$.

5. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *wird* ***Dirichlet Funktion*** *genannt und ist nirgendwo stetig. Offene Kugeln in* $\mathbb{R}$ *sind (beschränkte) offene Intervalle, und jedes solche Intervall enthält sowohl rationale als auch irrationale Punkte. Für* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ *kann es somit nie ein Intervall geben, das ganz nach* $K_\varepsilon(0)$ *oder* $K_\varepsilon(1)$ *abgebildet wird.*

6. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *ist stetig in* 0 *und unstetig* $\forall x \neq 0$. *Für* 0 *klappt es mit* $\delta = \varepsilon$, *und für* $x \neq 0$ *kann es nicht gehn, wieder wegen der vielen rationalen und irrationalen Zahlen in jedem offenen Intervall.*

7. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *ist stetig: Sei* $x \in \mathbb{R}$ *beliebig, aber fest. Wir müssen zeigen, daß man zu jedem vorgelegten* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *finden kann, sodaß für beliebiges* $y \in \mathbb{R}$, $|y - x| < \delta$ *zur Folge hat, daß* $|y^2 - x^2| < \varepsilon$. *Sei also* $\varepsilon > 0$ *und nehmen wir an, wir haben so ein* δ *schon. Es gilt doch*
$$|y^2 - x^2| = |(y - x)(y + x)| = |y - x||y + x|.$$
Wenn nun $|y - x| < \delta$, *dann* $|y - x||y + x| \leq \delta|y + x|$, *und daher*
$$|y^2 - x^2| \leq \delta|y + x| \leq \delta(|y| + |x|). \tag{7}$$

Es gilt jetzt auch

$$|y| - |x| \leq \big||y| - |x|\big| \leq |y - x| < \delta$$

also $|y| < |x| + \delta$ *und so* $|y| + |x| < 2|x| + \delta$. *Multiplikation (auf beiden Seiten) mit* δ *gibt* $\delta(|y| + |x|) < 2|x|\delta + \delta^2$. *Ein Blick auf (7) zeigt*

$$|y^2 - x^2| < 2|x|\delta + \delta^2.$$

Wenn $\delta < 1$, *dann ist* $\delta^2 < \delta$ *und es folgt*

$$|y^2 - x^2| < (2|x| + 1)\delta.$$

Damit $|y^2 - x^2| < \varepsilon$ *wird, braucht* δ *nur einfach kleiner als* $\frac{\varepsilon}{2|x|+1}$ *zu sein, und das darf es. Wenn man also - bei vorgegebenem* $\varepsilon > 0$ *- eine Zahl* δ *so wählt, daß* $0 < \delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x|+1}\}$, *etwas, das selbstverständlich möglich ist, dann ist* $|y^2 - x^2| < \varepsilon$, *und das bedeutet,* f *ist stetig in* x. *Da* x *beliebig war, ist* f *(global) stetig.*

Satz 9. X, Y, Z *metrische Räume,* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

1. $\forall x \in X$ *gilt:* f *stetig in* $x \wedge g$ *stetig in* $f(x) \Rightarrow g \circ f$ *stetig in* x.
2. f *stetig* $\wedge\ g$ *stetig* $\Rightarrow g \circ f$ *stetig.*

Proof.

1. $x \in X$, W eine Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Wegen Stetigkeit von g in $f(x)$ gibt es eine Umgebung V von $f(x)$ mit $g(V) \subseteq W$. Wegen Stetigkeit von f in x gibt es eine Umgebung U von x, sodaß $f(U) \subseteq V$; daher $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$.
2. Folgt unmittelbar aus 1.

□

Korollar 5. X, Y *metrisch,* $x \in A \subseteq X$, $f\colon X \longrightarrow Y$

1. f *stetig in* $x \Rightarrow f|_A$ *stetig in* x.
2. f *stetig* $\Rightarrow\ f|_A$ *stetig.*

Proof. $f|_A = f \circ i$, wo $A \xrightarrow{i} X$ die Inklusion. Daher folgt alles aus Example 14, 3. und Satz 9. □

Die Umkehrung gilt nicht:

Beispiel 15. *Sei* f *die Dirichletfunktion,* i *die Inklusion* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, *also*

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{i} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

$f|_{\mathbb{Q}} = f \circ i = const$, *also stetig, aber* f *ist so unstetig wie eine Funktion nur sein kann.*

Betrachten wir nun eine Menge $Z \subseteq Y$, die so liegt, daß sie das image einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ umfaßt, $\mathrm{im}(f) \subseteq Z \subseteq Y$. Dann kann f auch gesehen werden als Abbildung $X \longrightarrow Z$. Pedantisch, wie wir manchmal sind, ist das eine von f zu unterscheidende Abbildung, daher nennen wir sie anders als f, etwa g. Aber $\mathrm{Graph}(f) = \mathrm{Graph}(g)$ und natürlich ist $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$. Bezüglich Stetigkeit ist jedenfalls nichts zu befürchten:

Korollar 6.

1. *$f: X \longrightarrow Y$ stetig in x $\Leftrightarrow$ $g: X \longrightarrow Z$ stetig in x.*
2. *$f: X \longrightarrow Y$ stetig $\Leftrightarrow$ $g: X \longrightarrow Z$ stetig.*

Für Stetigkeit ist es somit unerheblich, ob z.B. die Abbildung $x \mapsto x^2$ als Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oder als Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ betrachtet wird. Für andere Merkmale (z.B. Surjektivität) sind diese Abbildungen wohl zu unterscheiden.

Satz 10. *$X \xrightarrow{f} Y$ Abbildung metrischer Räume. Äquivalent sind:*

1. *f ist stetig*
2. *Das Urbild jeder offenen Menge in Y ist offen in X.*
3. *Das Urbild jeder in Y abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen in X.*
4. *$\forall A \subseteq X\ f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$*
5. *$\forall B \subseteq Y\ f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$*

Proof. (1. $\to$ 2.) Sei $G \subseteq Y$ offen, $x \in f^{-1}(G)$. Dann ist $f(x) \in G$, also $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$. Weil f in x stetig ist, $\exists \delta > 0$ mit $f(K_\delta(x)) \subseteq K_\varepsilon(f(x))$, also $f(K_\delta(x)) \subseteq G$ und daher $K_\delta(x) \subseteq f^{-1}(G)$. Die Menge $f^{-1}(G)$ enthält also um jeden ihrer Punkte eine offene Kugel, ist daher offen.[17]
(2. $\to$ 1.) $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Die Kugel $K_\varepsilon(f(x))$ ist offen in Y, ihre Urbild $f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$ ist somit offen in X. Das bedeutet, es enthält um jeden seiner Punkte eine Kugel, also auch um x: $\exists \delta > 0\ K_\delta(x) \subseteq f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$. Es folgt

$$f(K_\delta(x)) \subseteq ff^{-1}(K_\varepsilon(f(x))) \subseteq K_\varepsilon(f(x)).$$

Wir haben damit nachgewiesen, daß f stetig in x. Da $x \in X$ beliebig war, ist f stetig.
(2. $\leftrightarrow$ 3.) Ist simpel, denn: Eine Menge ist abgeschlossen, genau dann, wenn ihr Komplement offen ist; und: $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ für beliebiges $B \subseteq Y$.
(1. $\to$ 4.) Sei $A \subseteq X$ und $y \in f(\overline{A})$. Dann $\exists x \in \overline{A}$ mit $f(x) = y$. Zu beliebiger Umgebung V von y gibt es eine Umgebung U von x sodaß $f(U) \subseteq V$.[18] Nun ist x Berührungspunkt von A, also schneidet die Umgebung U von x die Menge A: $\exists a \in U \cap A$. Daher ist $f(a) \in f(U) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$, das heißt, V schneidet $f(A)$. Das bedeutet, y ist Berührungspunkt von $f(A)$, also $y \in \overline{f(A)}$. Daher $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

[17] Mit den Zusammenhängen aus Lemma 2 geht es schneller: $G \subseteq Y$ offen, $x \in f^{-1}(G)$ $\Rightarrow$ $f(x) \in G$, G Umgebung von $f(x)$, daher $f^{-1}(G)$ Umgebung von x (wegen Lemma 4). Nochmals wegen Lemma 2 ist $f^{-1}(G) \subseteq X$ offen.
[18] weil f stetig in x, und Lemma 4.

(4. $\to$ 3.) Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Wir setzen $A := f^{-1}(B)$. Nach Vorraussetzung gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, also

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(B)} \subseteq \overline{B} = B$$

Anwendung der Regeln für das Urbild gibt:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$$

□

Das Bild einer offenen (abgeschlossenen) Menge unter einer stetigen Abbildung muß nicht offen (abgeschlossen) sein. Das sieht man schon an einer Inklusion $A \hookrightarrow X$ wobei A nicht offen sei in X. A ist offen in A, ihr Bild - wieder A - nicht offen in X. Aber auch:

Beispiel 16.

1. *$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $A = (-1, 1)$ ist offen in $\mathbb{R}$, $f(A) = [0, 1)$ nicht.*
2. *Die Menge $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, ihr Bild unter $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist die Menge $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, die nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.*[19]

8 Äquivalente Normen

Jede Norm $N: V \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V induziert eine Metrik $d: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ und dadurch ein System offener Mengen, eine Topologie. Lemma 4 und Satz 10 sagen unter anderem, daß für die Eigenschaft einer Abbildung $X \longrightarrow Y$ stetig zu sein, die Topologien von X und Y verantwortlich sind und nicht die Metriken oder die Normen. Wir können also - wenn es um Stetigkeit geht - Normen (Metriken), welche ein und dieselbe Topologie induzieren, gegeneinander austauschen.

Definition 40. *Zwei Normen $N_1, N_2: V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen **äquivalent**, wenn die von ihnen induzierten Metriken die gleiche Topologie erzeugen.*

Wir schreiben $N_1 \sim N_2$, falls N_1 und N_2 äquivalent sind.

Lemma 5. *Zwei Metriken d_1, d_2 auf der Menge X erzeugen dieselbe Topologie auf X genau dann, wenn $\forall x \in X$ jede offene d_1-Kugel um x eine offene d_2-Kugel (mit einem i.a. anderen Radius) um x enthält*[20] *und umgekehrt, jede offene d_2-Kugel um x auch eine offene d_1-Kugel um x.*

Proof. Falls die beiden Topologien gleich sind, ist jede offene d_1-Kugel - als eine d_1-offene Menge - auch d_2-offen, enthält also um jeden ihrer Punkte eine d_2-Kugel, also auch um ihren signierten Mittelpunkt. Die Rollen von d_1 und d_2 in diesem Argument sind symmetrisch. Umgekehrt: Es gelte

$$\forall x \in X \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; (K_\delta^{d_2}(x) \subseteq K_\varepsilon^{d_1}(x)) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; (K_\delta^{d_1}(x) \subseteq K_\varepsilon^{d_2}(x)) \right).$$

[19] Daß die Menge A hier unbeschränkt ist, hat System. Ein analoges Beispiel mit einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, welche abgeschlossen und beschränkt ist, kann es nicht geben.

[20] mit 'offene Kugel um x' ist gemeint: 'offene Kugel mit Mittelpunkt x', also ein $K_\varepsilon(x)$, für irgendein $\varepsilon > 0$.

Ist nun $U \subseteq X$ offen bezüglich d_1, so gibt es um jeden Punkt $x \in U$ eine d_1-Kugel, die ganz in U liegt. Jede dieser Kugeln enthält eine d_2-Kugel, also ist U offen bez. d_2. Es folgt, daß jede d_1-offene Menge auch d_2-offen ist. Genauso ist jede d_2-offene Menge auch d_1-offen, i.e., die beiden Topologien sind identisch. $\square$

Proposition 22. *Es seien $N_1, N_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ Normen auf dem reellen Vektorraum V. Dann gilt*

$$N_1 \sim N_2 \iff \exists \alpha > 0 \exists \beta > 0 \forall x \in V \ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Proof. ($\leftarrow$) $x \in V$. Sei $K_r^{N_1}(x)$ eine offene Kugel bez. N_1. Ist $y \in K_{\alpha r}^{N_2}(x)$, so $N_2(y-x) < \alpha r$, somit $\alpha N_1(y-x) \leq N_2(y-x) < \alpha r$, also $N_1(y-x) < r$, und das bedeutet $y \in K_r^{N_1}(x)$. Wir finden daher in jeder offenen N_1-Kugel mit Radius r die offene N_2-Kugel mit Radius αr. Genauso, wenn $y \in K_{\frac{r}{\beta}}^{N_1}(x)$, dann $N_1(y-x) < \frac{r}{\beta}$, und so $N_2(y-x) \leq \beta N_1(y-x) < r$, das heißt, $y \in K_r^{N_2}(x)$. Es gilt also immer $K_{\frac{r}{\beta}}^{N_1}(x) \subseteq K_r^{N_2}(x)$.
($\rightarrow$) Zur Einskugel $K_1^{N_2}(0)$ um den Nullpunkt muß es ein $r > 0$ geben mit $K_r^{N_1}(0) \subseteq K_1^{N_2}(0)$. $\forall x \in V$ gilt dann $N_1(x) < r \Rightarrow N_2(x) < 1$. Genauso $\exists s > 0$ sodaß $K_s^{N_2}(0) \subseteq K_1^{N_1}(0)$, also $\forall x \in V$ $(N_2(x) < s \Rightarrow N_1(x) < 1)$.

Sei $x \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $\frac{r}{2N_1(x)}x$ ein Vektor von N_1-Norm $< r$, denn

$$N_1\left(\frac{r}{2N_1(x)}x\right) = \frac{r}{2N_1(x)}N_1(x) = \frac{r}{2} < r.$$

Daher folgt

$$N_2\left(\frac{r}{2N_1(x)}x\right) < 1,$$

also $\frac{r}{2N_1(x)}N_2(x) < 1$, und so $N_2(x) < \frac{2}{r}N_1(x)$.

Analog, $N_2\left(\frac{s}{2N_2(x)}x\right) = \frac{s}{2N_2(x)}N_2(x) = \frac{s}{2} < s$ und daher $N_1\left(\frac{s}{2N_2(x)}x\right) < 1$, also $\frac{s}{2}N_1(x) < N_2(x)$. Für beliebiges $x \neq 0$ gilt also

$$\frac{s}{2}N_1(x) < N_2(x) < \frac{2}{r}N_1(x),$$

und daher für alle $x \in V$ (auch für $x = 0$)

$$\frac{s}{2}N_1(x) \leq N_2(x) \leq \frac{2}{r}N_1(x).$$

$\square$

Beispiel 17. $N_1(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ *und* $N_3(x) = \max_{j=1}^n |x_j|$ *sind Normen auf dem Vektorraum* $\mathbb{R}^n$. *Da*

$$|x_i| \leq \max_{j=1}^n |x_j| = N_3(x), \quad (1 \leq i \leq n)$$

folgt durch Aufsummieren dieser Ungleichungen, daß $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq nN_3(x)$. *Es gilt aber auch* $\max_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|$, *also* $N_3(x) \leq N_1(x)$; *insgesamt*

$$N_3(x) \leq N_1(x) \leq nN_3(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Dann gilt noch $x_i^2 = |x_i|^2 \leq \left(\max_{j=1}^n |x_j|\right)^2 = N_3(x)^2$. *Aufsummieren und die Wurzelziehen liefert*

$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{nN_3(x)^2} = \sqrt{n}N_3(x).$$

$\left(\max_{j=1}^n |x_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, *also*

$$N_3(x) = \sqrt{\left(\max_{j=1}^n |x_j|\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = N_2(x)$$

im Ganzen somit

$$N_3(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{n}N_3(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Wir sehen so, daß $N_1 \sim N_3$ *und* $N_2 \sim N_3$. *Weil die Relation '* $\sim$ *' eine Äquivalenzrelation ist, folgt* $N_1 \sim N_2$ *von selbst. Wollen wir es explizit sehen, so folgt aus (8) und (9) sofort*

$$N_1(x) \leq nN_3(x) \leq nN_2(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}N_2(x) \leq N_3(x) \leq N_1(x)$$

also insgesamt

$$\frac{1}{\sqrt{n}}N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_2(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Je zwei der Normen N_1, N_2, N_3 *sind äquivalent.*[21]

[21] In Wahrheit sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent. Der $\mathbb{R}^n$ mit seiner natürlichen Topologie resultiert aus jeder möglichen Interpretation als normiertem Raum.