

# Technische Informatik 1

## Übungsaufgaben und Lösungen

### WS 2002/2003

22. Oktober 2003

## Bemerkungen zur Lösung

Folgende Konventionen wurden für die Lösung getroffen:

- In Schaltfunktionen wird folgende Notation verwendet:
  - Die Negation (NOT) wird als Strich über der Variable gekennzeichnet ( $\bar{x}$  ist also die Negation von  $x$ )
  - Die ODER (OR) - Operation wird entweder durch das Pluszeichen (+) oder durch ein kleines v ( $\vee$ ) dargestellt.
  - Die UND (AND) - Operation wird entweder durch das Malzeichen (\*) oder durch ein kleines umgedrehtes v ( $\wedge$ ) dargestellt. Oftmals wird hier auch der Operator nicht explizit angegeben: Wenn also zwischen zwei Variablennamen kein Operator steht, sind diese mit UND verknüpft ( $(x y)$  steht also für  $(x \text{ AND } y)$ )
- Schaltungen werden folgendermaßen dargestellt (Generell wird eine Notation ähnlich der DIN 40 900 verwendet):
  - Die Negation (NOT) wird durch einen kleinen Ring in der zu negierenden Leitung dargestellt; oftmals ist dieser auch am Eingang oder Ausgang eines passenden UND- bzw. ODER-Gatters angebracht.
  - Für das logische UND (AND) wird ein Gatter mit dem kaufmännischen Und (&) als Beschriftung verwendet.
  - Das ODER (OR)-Gatter trägt die Beschriftung  $\geq$ .
  - Das Aussehen der restlichen Gatter (Flip-Flops, Multiplexer etc.) orientiert sich größtenteils an den Übungsangaben bzw. dem Skriptum.
- Beispiele, bei denen keine Lösung bzw. überhaupt nichts steht wurden im WS 2002/03 nicht behandelt.

# 1 Kapitel 1

Dieses Kapitel wurde im WS 2002/03 ausgelassen

## 2 Kapitel 2

- 2.1) a)  $A + A * B = A$   
 $(A * 1) + (A * B) = A$  Existenz von 1:  $A * 1 = A$   
 $A * \underbrace{(1 + B)}_1 = A$  Distributivgesetz  
 $\underbrace{A * 1}_A = A$  Existenz von 1:  $B + 1 = 1$   
 $A = A$  was zu zeigen war
- b)  $A * (A + B) = A$   
 $\underbrace{A * A}_A + A * B = A$  Distributivgesetz  
 $A + A * B = A$  Idempotenzgesetz  
 $A * 1 + A * B = A$  Existenz von 1  
 $A * \underbrace{(1 + B)}_1 = A$  Distributivgesetz  
 $\underbrace{A * 1}_A = A$  Existenz von 1:  $B + 1 = 1$   
 $A = A$  was zu zeigen war
- c)  $A * B + A * \overline{B} = A$   
 $A * \underbrace{(B + \overline{B})}_1 = A$  Distributivgesetz  
 $\underbrace{A * 1}_A = A$  Existenz des Komplements:  $B + \overline{B} = 1$   
 $A = A$  was zu zeigen war
- d)  $(A + \overline{B}) * B = A * B$   
 $A * B + \underbrace{\overline{B} * B}_0 = A * B$  Distributivgesetz  
 $\underbrace{A * B + 0}_{A * B} = A * B$  Existenz von 0  
 $A * B = A * B$  was zu zeigen war
- e)  $A * \overline{B} + B = A + B$   
 $(A + B) * \underbrace{(\overline{B} + B)}_1 = A + B$  Distributivgesetz  
 $(A + B) * 1 = A + B$  Existenz von 1  
 $A + B = A + B$  was zu zeigen war
- f)  $(A + B) * (A + \overline{B}) = A$   
 $A + A * \overline{B} + A * B + \underbrace{B * \overline{B}}_0 = A$  Distributivgesetz  
 $A + A * \underbrace{(\overline{B} + B)}_1 = A$  Distributivgesetz  
 $A + A * 1 = A$  Existenz von 1:  $A * 1 = A$   
 $A = A$  was zu zeigen war

2.2)

$$\underbrace{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + x_2 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_4 + x_1 x_4}_{f_1} = \underbrace{\overline{x_1} + x_2 + x_4}_{f_2}$$

a) mit Hilfe der Wahrheitstabelle:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3$	$x_2 \overline{x_4}$	$\overline{x_1} x_4$	$x_1 x_4$	$\overline{x_1}$	$f_1$	$f_2$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1

b) mit Hilfe der Boole'schen Algebra:

$$\begin{aligned} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + x_2 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_4 + x_1 x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 \\ \overline{x_1} \overline{x_2} \underbrace{(\overline{x_3} + x_3)}_1 + x_2 \overline{x_4} + x_4 \underbrace{(\overline{x_1} + x_1)}_1 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 & ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) \\ \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 \overline{x_4} + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 & (a + \bar{a}) = 1, a * 1 = a \\ \overline{x_1} \overline{x_2} + (x_2 + x_4) \underbrace{(\overline{x_4} + x_4)}_1 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 & ab + c = (a + c)(b + c) \\ \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 \\ (\overline{x_1} + x_2) \underbrace{(\overline{x_2} + x_2)}_1 + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 & a\bar{b} + b = a + b \\ \overline{x_1} + x_2 + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 & a + \bar{a} = 1, a * 1 = a \end{aligned}$$

c) mit Hilfe des KV-Diagramms:

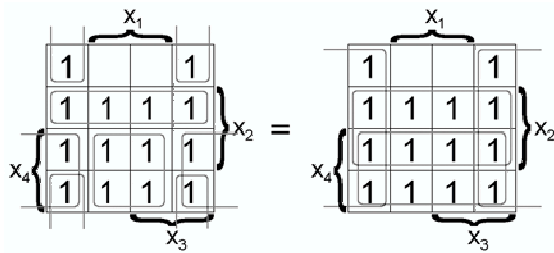


Abbildung 1: KV-Diagramm zu Bsp 2.2

2.3)  $n$  Schaltvariablen mit 2 möglichen Ausgabewerten 0 oder 1 ergeben  $k$  verschiedene Permutationen  $\Rightarrow k = 2^n$   
 $k$  verschiedene Ausdrücke mit 2 verschiedenen Ausgabewerten 0 oder 1 ergeben  $2^k$  verschiedene Permutationen  $\Rightarrow 2^k$  mit  $k = 2^n$

2.4) Die Verknüpfung der Eingangsvariablen wäre nicht definiert:

a	b	Ausgang
0	0	1
0	1	x
1	0	x
1	1	0

2.5) a)  $y_1 = (x_3 + x_2)\bar{x}_1$

$$\begin{aligned}
 f_{DNF} &= \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \\
 &= \bar{x}_1 (x_2 + \bar{x}_2) x_3 + \bar{x}_1 x_2 (x_3 + \bar{x}_3) \\
 &= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \\
 f_{DKF} &= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3
 \end{aligned}$$

Nr.	Minterm	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$	Maxterm
0	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		x	$x_1 + x_2 + x_3$
1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	x		$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
2	$\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_3$	x		$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
3	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	x		$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
4	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		x	$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$		x	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$		x	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
7	$x_1 x_2 x_3$		x	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

$$f_{KKF} = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$M_0$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$M_0$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

b)  $y_2 = x_1 x_2 + (x_2 + x_1 \bar{x}_3)$

$$\begin{aligned}
 f_{DNF} &= x_1 x_2 + x_2 + x_1 \bar{x}_3 \\
 &= x_1 x_2 (x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1) x_2 (x_3 + \bar{x}_3) + x_1 (x_2 + \bar{x}_2) \bar{x}_3 \\
 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \\
 f_{DKF} &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3
 \end{aligned}$$

Nr.	Minterm	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$	Maxterm
0	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		x	$x_1 + x_2 + x_3$
1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$		x	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
2	$\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_3$	x		$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
3	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	x		$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
4	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	x		$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$		x	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	x		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
7	$x_1 x_2 x_3$	x		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

$$f_{KKF} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_6$	$m_7$	$M_0$	$M_1$	$M_5$	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

c)  $y_3 = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$

$$\begin{aligned}
 f_{DNF} &= x_1 + \bar{x}_2 + x_3 \\
 &= x_1 (x_2 + \bar{x}_2) (x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1) \bar{x}_2 (x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1) (x_2 + \bar{x}_2) x_3 \\
 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \\
 &\quad + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \\
 f_{DKF} &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3
 \end{aligned}$$

Nr.	Minterm	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$	Maxterm
0	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$	x		$x_1 + x_2 + x_3$
1	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3$	x		$x_1 + x_2 + \overline{x_3}$
2	$\overline{x_1} x_3 \overline{x_3}$		x	$x_1 + \overline{x_2} + x_3$
3	$\overline{x_1} x_2 x_3$	x		$x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}$
4	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3}$	x		$\overline{x_1} + x_2 + x_3$
5	$x_1 \overline{x_2} x_3$	x		$\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$
6	$x_1 x_2 \overline{x_3}$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3$
7	$x_1 x_2 x_3$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_4}$

$$f_{KKF} = x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$M_2$	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

2.6)

$$f = x_1 + x_2 (x_3 \overline{x_1} + x_4) + \overline{x_2}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_2 x_4 + \overline{x_2} \\
 &= \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \\
 &\quad \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + \\
 &\quad x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 \\
 &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + \\
 &\quad m_{14} + m_{15}
 \end{aligned}$$

Nr.	Minterm	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$	Maxterm
0	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}$	x		$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
1	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$	x		$x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4}$
2	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$	x		$x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4$
3	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$	x		$x_1 + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4}$
4	$\overline{x_1} x_3 \overline{x_3} \overline{x_4}$		x	$x_1 + \overline{x_2} + x_3 + x_4$
5	$\overline{x_1} x_3 \overline{x_3} x_4$	x		$x_1 + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4}$
6	$\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$	x		$x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4$
7	$\overline{x_1} x_2 x_3 x_4$	x		$x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}$
8	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}$	x		$\overline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4$
9	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$	x		$\overline{x_1} + x_2 + x_3 + \overline{x_4}$
10	$x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$	x		$\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4$
11	$x_1 \overline{x_2} x_3 x_4$	x		$\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4}$
12	$x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4}$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4}$
13	$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + x_4$
14	$x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4$
15	$x_1 x_2 x_3 x_4$	x		$\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}$

$$f_{KKF} = x_1 + \overline{x_2} + x_3 + x_4$$

2.7)

2.8) Es gibt 8 solche Konjunktionsterme:

$$x_1, x_2, \overline{x_1}, \overline{x_2}, x_1 x_2, x_1 \overline{x_2}, \overline{x_1} x_2, \overline{x_1} \overline{x_2}$$

a) Minterme sind davon

$$x_1 x_2, x_1 \overline{x_2}, \overline{x_1} x_2, \overline{x_1} \overline{x_2}$$

Ein Minterm  $m$  ist ein Ausdruck der Form (bei  $n$  Variablen):

$$m = x_1^{\delta_1} * x_2^{\delta_2} * x_3^{\delta_3} * \dots * x_n^{\delta_n}$$

$$\text{mit } \delta_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_i^{\delta_i} = \begin{cases} x_i & \text{für } \delta_i = 1 \\ \overline{x_i} & \text{für } \delta_i = 0 \end{cases}$$

Ein Minterm ist also ein Konjunktionsterm, in dem alle in der Schaltung vorkommenden Variablen in negierter bzw. nicht negierter Form genau einmal vorkommen

b) Die Konjunktion zweier Minterme ergibt immer 0 (außer die Konjunktion eines Minterms mit sich selbst, diese ergibt wieder den gleichen Minterm):

$$(x_1 x_2) * (\overline{x_1} x_2) = \underbrace{x_1 \overline{x_1}}_0 \underbrace{x_2 x_2}_{x_2} = 0 * x_2 = 0$$

$$(x_1 x_2) * (x_1 \overline{x_2}) = x_1 x_1 x_2 \overline{x_2} = x_1 * 0 = 0$$

$$(x_1 x_2) * (\overline{x_1} \overline{x_2}) = x_1 \overline{x_1} x_2 \overline{x_2} = 0 * 0 = 0$$

$$(x_1 \overline{x_2}) * (\overline{x_1} x_2) = x_1 \overline{x_1} \overline{x_2} x_2 = 0 * 0 = 0$$

$$(x_1 \overline{x_2}) * (\overline{x_1} \overline{x_2}) = x_1 \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_2} = 0 * \overline{x_2} = 0$$

$$(\overline{x_1} x_2) * (\overline{x_1} \overline{x_2}) = \overline{x_1} \overline{x_1} x_2 \overline{x_2} = \overline{x_1} * 0 = 0$$

c) Ein Konjunktionsterm von  $n$  Variablen kann maximal die Länge  $n$  erreichen; Minterme sind also längste Konjunktionsterme

d) • **DKF:** Die *Disjunktive Kanonische Form* ist eindeutig zu  $f$  und ist die disjunktive Verknüpfung (+) von Mintermen

• **DNF:** Die *Disjunktive Normalform* ist *nicht* eindeutig zu  $f$  und ist die disjunktive Verknüpfung (+) von Konjunktionstermen. Diese Konjunktionsterme müssen keine Minterme sein, es können Konjunktionsterme beliebiger Länge sein.

2.9) a) Der *kürzeste Konjunktionsterm* besteht aus genau einer Variable (d.h. er hat die Länge 1) und wird als *Literal* bezeichnet.

Der *längste Konjunktionsterm* besteht bei  $n$  Variablen aus  $n$  Variablen und wird als *Minterm* bezeichnet.

b) Die *kürzeste Disjunktion von 3 Konjunktionstermen* ist die disjunktive Verknüpfung von 3 Literalen, z.B.:  $x_1 + x_2 + \overline{x_3}$

2.10) Gegeben sei die 2 von 3 Funktion  $f = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$

a) Wahrheitstafel der Funktion



$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$f$	Minterm	Nr
0	0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	0	0		
0	1	0	0	0	0	0		
0	1	1	0	0	1	1	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	$m_3$
1	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	1	0	1	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	$m_5$
1	1	0	1	0	0	1	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	$m_6$
1	1	1	1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3$	$m_7$

b) KV-Diagramm

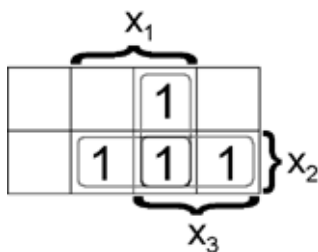


Abbildung 2: KV-Diagramm zu Bsp 2.10

c) Minterme: Siehe Wahrheitstabelle in a):  $f_{DKF} = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$

2.11) Es gibt hier jeweils 2 solche längste  $f_{DKF}$ :

• **2 Variablen:**

$$f_{DKF} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2$$

$$g_{DKF} = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2$$

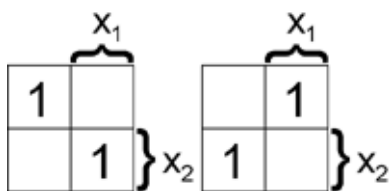


Abbildung 3: Bsp 2.11: längste  $f_{DKF}$  für 2 Variablen

• **3 Variablen:**

$$f_{DKF} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$g_{DKF} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3$$

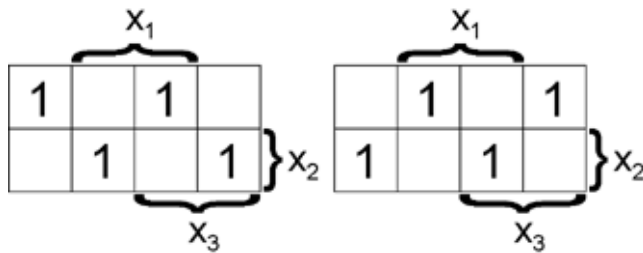


Abbildung 4: Bsp 2.11: längste  $f_{DKF}$  für 3 Variablen

• 4 Variablen:

$$f_{DKF} = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$$

$$g_{DKF} = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4$$

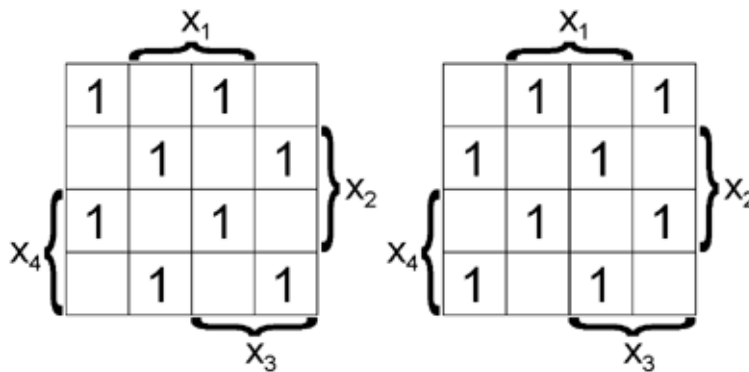


Abbildung 5: Bsp 2.11: längste  $f_{DKF}$  für 4 Variablen

2.12) gegeben:  $\text{NOR}(x, y) = \overline{x \vee y}$

• NOT:

$$\overline{x} = \overline{x \vee x} \quad \text{Idempotenz } (x = x \vee x)$$

$$= \text{NOR}(x, x)$$

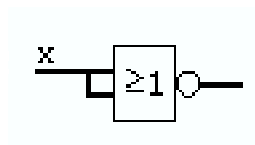


Abbildung 6: Bsp 2.12: Schaltung von NOT mit NOR-Gatter

• OR:

$$x \vee y = (x \vee y) \wedge (x \vee y) \quad \text{Idempotenz}$$

$$= \overline{\overline{(x \vee y) \wedge (x \vee y)}} \quad \text{Involution}$$

$$= \overline{(x \vee y) \vee (x \vee y)} \quad \text{DeMorgan}$$

$$= \text{NOR}(\text{NOR}(x, y), \text{NOR}(x, y))$$

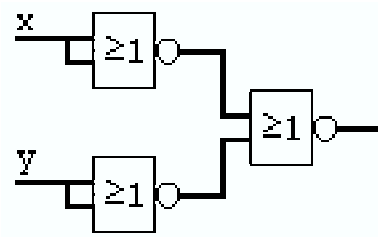


Abbildung 7: Bsp 2.12: Schaltung von OR mit NOR-Gatter

• **AND:**

$$\begin{aligned}
 x \wedge y &= \overline{\overline{x \wedge y}} && \text{Involution } (x = \overline{\overline{x}}) \\
 &= \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} && \text{DeMorgan} \\
 &= \overline{(x \vee x) \vee (y \vee y)} && \text{Idempotenz} \\
 &= \text{NOR}(\text{NOR}(x, x), \text{NOR}(y, y))
 \end{aligned}$$

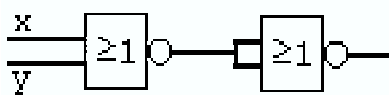


Abbildung 8: Bsp 2.12: Schaltung von OR mit NOR-Gatter

- 2.13) a) a1) Wohlgeformt, da azyklisch und Ausgänge nicht direkt verbunden.  
 a2) Nicht wohlgeformt, da zyklisch.  
 a3) Nicht wohlgeformt, da Ausgänge direkt verbunden.
- b) Zugehörige Schaltfunktionen:
- b1)  $y = (x \wedge x) \vee x = x$
  - b2)  $z = x \vee y$   
 $y = x \wedge z$
  - b3)  $y = x_1 \wedge x_2$   
 $y = x_1 \vee x_2$   
 y wird auf zwei verschiedene Arten geschaltet;

2.14) Zu zeichnen ist die folgende Schaltung (Multiplexer):

$$f_{DNF} := x_1 \bar{s} \vee x_2 s$$

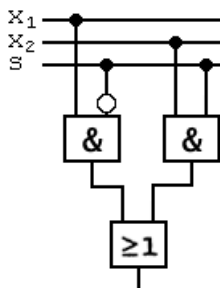


Abbildung 9: Bsp 2.14: Schaltung der  $f_{DNF}$  eines Multiplexers

a)  $f_{DNF} = x_1 \bar{s} + x_2 s$   
 $= x_1 (x_2 + \bar{x}_2) \bar{s} + (x_1 + \bar{x}_1) x_2 s$   
 $f_{DKF} = x_1 x_2 \bar{s} + x_1 \bar{x}_2 \bar{s} + x_1 x_2 s + \bar{x}_1 x_2 s$

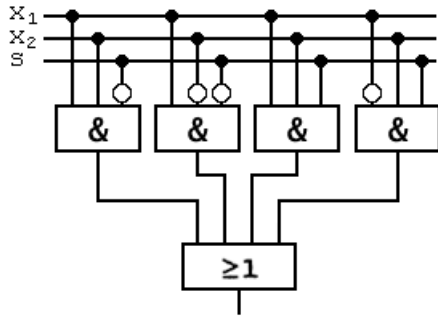


Abbildung 10: Bsp 2.14: Schaltung der  $f_{DKF}$  eines Multiplexers

Nr.	Minterm	$f_{DKF}$	$f_{KKF}$	Maxterm
0	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$		x	$x_1 + x_2 + x_3$
1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$		x	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
2	$\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_3$		x	$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
3	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	x		$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
4	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	x		$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$		x	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	x		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
7	$x_1 x_2 x_3$	x		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4$

b)  $f_{KKF} = (x_1 + x_2 + s) * (x_1 + x_2 + \bar{s}) * (x_1 + \bar{x}_2 + s) * (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{s})$

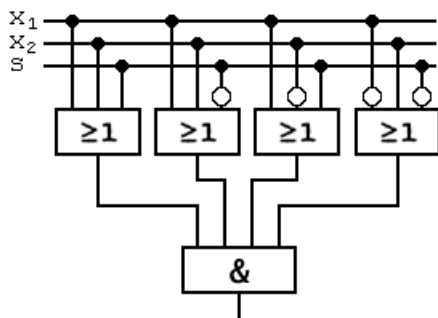


Abbildung 11: Bsp 2.14: Schaltung der  $f_{KKF}$  eines Multiplexers

- c) Anzahl Gatter der verschiedenen Schaltungen:  
 $f_{DNF}$  ... 4 Gatter  
 $f_{DKF}$  ... 9 Gatter  
 $f_{KKF}$  ... 9 Gatter

2.15) a) Die Terme in den Konturen lauten:

$$\overline{x_1} \overline{x_2}, x_2 \overline{x_4}, \overline{x_1} x_4, x_1 x_4$$

Dies sind Implikanten, disjunktiv verknüpft bilden sie eine  $f_{DNF}$  der Funktion:

$$f_{DNF} = \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_4 + x_1 x_4$$

b) Durch Vereinfachen der obigen  $f_{DNF}$  bzw. durch Ablesen aus dem KV-Diagramm ergibt sich folgende  $f_{DMF}$ :

$$f_{DMF} = \overline{x_1} + x_2 + x_4$$

c)  $\overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 \overline{x_4} + \underbrace{\overline{x_1} x_4 + x_1 x_4}_{x_4} = \overline{x_1} + x_2 + x_4$

$$\begin{aligned} \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 \overline{x_4} + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 \\ \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 \quad a\overline{b} + b = a + b \\ \overline{x_1} + x_2 + x_4 &= \overline{x_1} + x_2 + x_4 \end{aligned}$$

2.16)

$$f_{DNF} = x_1 x_3 + x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1}$$

$$\begin{aligned} f_{DKF} &= x_1 x_3 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7 \end{aligned}$$

2.17) Im KV-Diagramm ist die Funktion dargestellt durch die 1er,  $M_F$  enthält also alle diese Einsen an ihren dargestellten Positionen. Man kann hier leicht erkennen, dass  $M_I$  eines beliebigen Implikanten (eine der eingerahmten Flächen) auch nur dort Einsen enthalten können, wo in der Gesamtfunktion eine 1 steht.

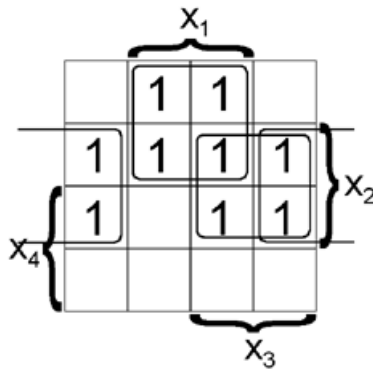


Abbildung 12: Bsp 2.17: KV-Diagramm

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1 \overline{x_4}$	$x_2 x_3$	$\overline{x_1} x_2$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	1	1
7	0	1	1	1	0	1	1	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1 \overline{x_4}$	$x_2 x_3$	$\overline{x_1} x_2$	$f$
8	1	0	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	0	0
10	1	0	1	0	1	0	0	1
11	1	0	1	1	0	0	0	0
12	1	1	0	0	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0	0	0	0
14	1	1	1	0	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0	1	0	1

Aus der Wahrheitstabelle lässt sich leicht ablesen, dass überall dort, wo ein beliebiger Implikant der Funktion eine 1 ergibt auch die Funktion 1 ist; die 1en sind die einzelnen Minterme, dies bedeutet, dass alle Minterme des Implikanten auch in der Menge der Minterme der Funktion enthalten sind!

2.18)

2.19) a) Vereinfachen mittels Quine McCluskey:

Klasse	Gewicht	Minterm																
		$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$													
1	1	0	0	0	1	x	1,5	0	-	0	1	x	1,5/9,13	-	-	0	1	x
2	5	0	1	0	1	x	1,9	-	0	0	1	x	1,9/5,13	-	-	0	1	x
	6	0	1	1	0	x	5,7	0	1	-	1	x	5,7/13,15	-	1	-	1	x
	9	1	0	0	1	x	5,13	-	1	0	1	x	5,13/7,15	-	1	-	1	x
	10	1	0	1	0	x	6,7	0	1	1	-	x	6,7/14,15	-	1	1	-	x
3	7	0	1	1	1	x	6,14	-	1	1	0	x	6,14/7,15	-	1	1	-	x
	11	1	0	1	1	x	9,11	1	0	-	1	x	9,11/13,15	1	-	-	1	x
	13	1	1	0	1	x	9,13	1	-	0	1	x	9,13/11,15	1	-	-	1	x
	14	1	1	1	0	x	10,11	1	0	1	-	x	10,11/14,15	1	-	1	-	x
4	15	1	1	1	1	x	10,14	1	-	1	0	x	10,14/11,15	1	-	1	-	x
							7,15	-	1	1	1	x						
							11,15	1	-	1	1	x						
							13,15	1	1	-	1	x						
							14,15	1	1	1	-	x						

Bilden der Restüberdeckung:

Primimpl.	$m_1$	$m_5$	$m_6$	$m_9$	$m_{10}$	$m_7$	$m_{11}$	$m_{13}$	$m_{14}$	$m_{15}$
1,5/9,13	x	x		x				x		
5,7/13,15		x				x		x		x
6,7/14,15			x			x			x	x
9,11/13,15				x			x	x		x
10,11/14,15					x		x		x	x

wesentliche Primimplikanten:

$$\begin{array}{l|l}
 1,5/9,13 & x_1 \overline{x_2} \\
 6,7/14,15 & x_2 x_3 \\
 10,11/14,15 & x_2 x_4
 \end{array}$$

Die wesentlichen Primimplikanten überdecken bereits alle Minterme der Funktion.

$$f_{DMF} = x_1 \bar{x}_2 + x_2 x_3 + x_2 x_4$$

- b) Die Minterme müssen nach Klassen sortiert werden. Eine Klasse enthält genau die Minterme, welche die selbe Anzahl negierte bzw. nicht negierte Variablen enthalten. Diese Einteilung nach Klassen erlaubt das systematische Verschmelzen der Minterme: Verschmelzbar sind Minterme nur, wenn sie in benachbarten Klassen liegen.
- c) Es dient nur der Identifikation der Minterme bzw. der Übersichtlichkeit.
- d) Das zugehörige KV-Diagramm: siehe Abbildung

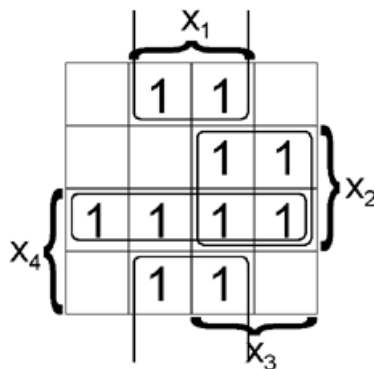


Abbildung 13: Bsp 2.19: KV-Diagramm

- 2.20) Da für eine solche  $f_{DKF}$  gelten muss, dass sie sich nicht weiter vereinfachen lässt, darf sie nur Minterme aus nicht benachbarten Klassen enthalten. Daraus kann man schon ableiten, dass es immer genau zwei solcher Funktionen gibt: Eine, die aus allen Mintermen der ungeraden Klassen zusammengesetzt ist und eine aus den Mintermen der geraden Klassen. Dies bedeutet z.B. für eine Funktion aus 2 Variablen:

$$f_1 = x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad \text{Minterme aus den Klassen 0 und 2}$$

$$f_2 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 \quad \text{Minterme aus der Klasse 1}$$

Weitere Beispiele (für Funktionen aus 3 bzw. 4 Variablen) siehe Bsp. 2.11.

- 2.21) a) Mit Hilfe des KV-Diagramms:

$$f_{DMF} = x_1 \bar{x}_2 + x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3$$

- b) Mit Hilfe von Quine McCluskey (mit d=1):

Klasse	Gewicht	Minterm							
1	8	1 0 0 0	x	8,9	1 0 0 -	x	8,9/10,11	1 0 - -	x
2	5	0 1 0 1	x	8,10	1 0 - 0	x	8,10/9,11	1 0 - -	x
	6	0 1 1 0	x	5,7	0 1 - 1	x	5,7/13,15	- 1 - 1	x

Klasse	Gewicht	Minterm										
	9	1 0 0 1	x	5,13	- 1 0 1	x	5,13/7,15	- 1 - 1				
	10	1 0 1 0	x	6,7	0 1 1 -	x	6,7/14,15	- 1 1 -			x	
3	7	0 1 1 1	x	6,14	- 1 1 0	x	6,14/7,15	- 1 1 -				
	11	1 0 1 1	x	9,11	1 0 - 1	x	9,11/13,15	1 - - 1			x	
	13	1 1 0 1	x	9,13	1 - 0 1	x	9,13/11,15	1 - - 1				
	14	1 1 1 0	x	10,11	1 0 1 -	x	10,11/14,15	1 - 1 -			x	
4	15	1 1 1 1	x	10,14	1 - 1 0	x	10,14/11,15	1 - 1 -				
				7,15	- 1 1 1	x						
				11,15	1 - 1 1	x						
				13,15	1 1 - 1	x						
				14,15	1 1 1 -	x						

Primimplikant	Minterm	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$	$m_{11}$	$m_{13}$	$m_{14}$	$m_{15}$
8,9/10,11	1 0 - -				x	x	x	x			
5,7/13,15	- 1 - 1	x		x					x		x
6,7/14,15	- 1 1 -		x	x						x	x
9,11/13,15	1 - - 1					x		x	x		x
10,11/14,15	1 - 1 -						x	x	x		x

Wesentliche Primimplikanten sind:

-1-1 (5,7/13,15), -11- (6,7/14,15), 10-- (8,9/10,11)

Diese 3 Implikanten decken auch bereits alle Minterme ab, die  $f_{DMF}$

lautet daher:  $f_{DMF} = x_1 \bar{x}_2 + x_2 x_3 + x_2 x_4$

- c) Die beiden KV-Diagramme gleichen sich bis auf die d's, die im KV-Diagramm aus Bsp. 2.21 einige der Einsen aus dem KV-Diagramm von Bsp. 2.19 ersetzen. Die mittels Quine McCluskey erstellten  $f_{DMF}$  sind gleich, weil in Bsp 2.21 die d's wieder als Einsen gesehen wurden. Die aus dem KV-Diagramm erstellte  $f_{DMF}$  hingegen wurde mit Berücksichtigung der d's erstellt, die ja für einen beliebigen Wert (0 oder 1, es ist egal) stehen. Damit ergibt sich eine einfachere Funktion.

2.22) a) Nach Quine McCluskey.

Klasse	Gewicht	Minterm										
1	4	0 1 0 0	x	4,6	0 1 - 0	x	4,6/12,14	- 1 - 0			x	
2	6	0 1 1 0	x	4,12	- 1 0 0	x	4,12/6,14	- 1 - 0				
		9	1 0 0 1	x	6,14	- 1 1 0	x	9,11/13,15	1 - - 1		x	
3	12	1 1 0 0	x	9,11	1 0 - 1	x	9,13/11,15	1 - - 1				
		11	1 0 1 1	x	9,13	1 - 0 1	x	12,13/14,15	1 1 - -		x	
		13	1 1 0 1	x	12,13	1 1 0 -	x	12,14/13,15	1 1 - -			
4	14	1 1 1 0	x	12,14	1 1 - 0	x						
		15	1 1 1 1	x	11,15	1 - 1 1	x					
				13,15	1 1 - 1	x						
				14,15	1 1 1 -	x						

Primimplikant	Minterm	$m_4$	$m_6$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{14}$	$m_{15}$
4,6/12,14	- 1 - 0	x	x			x		x	



Primimplikant	Minterm	$m_4$	$m_6$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{14}$	$m_{15}$
9,11/13,15	1 - - 1			x	x		x		x
12,13/14,15	1 1 - -					x	x	x	x

Wie in Bsp. 2.21 decken die wesentlichen Primimplikanten (-1-0, 1-1) bereits alle Minterme der Funktion ab.

$$f_{DMF} = x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4$$

b) Mit dem graph. Algorithmus 1 aus der Vorlesung:

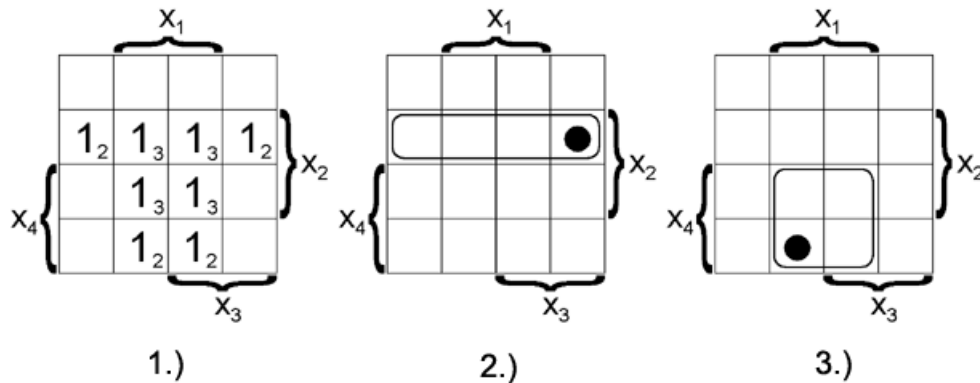


Abbildung 16: Bsp 2.22: Graphischer Minimierungsalgorithmus

Beschreibung zur Graphik (die einzelnen Schritte aus den Skriptum entnommen):

- 1.) Nachbarn für jeden Minterm zählen (Die Anzahl Nachbarn ist die kleine Zahl im rechten unteren Eck jedes abzudeckenden Minterms).
- 2.) Noch nicht abgedeckten Minterm mit minimaler Nachbarzahl auswählen: Da hier mehrere Minterme die minimale Nachbarzahl (2 Nachbarn) haben, kann man einen beliebigen dieser 4 auswählen. In der gezeigten Graphik wurde der rechte obere Minterm gewählt. Aus diesem ist ein solcher Primimplikant zu bilden, der die meisten noch nicht abgedeckten Minterme beinhaltet. Dies ist eindeutig der Primimplikant mit den 4 waagrechten Einsen. Dieser Primimplikant wird also auf jeden Fall in der  $f_{DMF}$  verwendet und kann abgehakt werden.
- 3.) Solange noch nicht abgedeckte Minterme vorhanden sind, diesen Vorgang wiederholen: Hier wurde der linke untere Minterm, der nur 2 Nachbarn hat, ausgewählt. Es ist offensichtlich, welcher Primimplikant hier zu bilden ist: Derjenige nämlich, welcher die vier restlichen, quadratisch angeordneten Minterme abdeckt. Damit ist die  $f_{DMF}$  gefunden, sie entspricht der aus a)

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4 + x_1 x_2 = x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4 \\
 & x_1 x_4 (x_2 + \bar{x}_2) + x_2 \bar{x}_4 (x_1 + \bar{x}_1) + x_1 x_2 (x_4 + \bar{x}_4) \\
 & x_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4 \\
 & x_1 x_4 (x_2 + \bar{x}_2) + x_2 \bar{x}_4 (x_1 + \bar{x}_1) \\
 & x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4 = x_1 x_4 + x_2 \bar{x}_4 \text{ q.e.d}
 \end{aligned}$$

2.23) Stock:

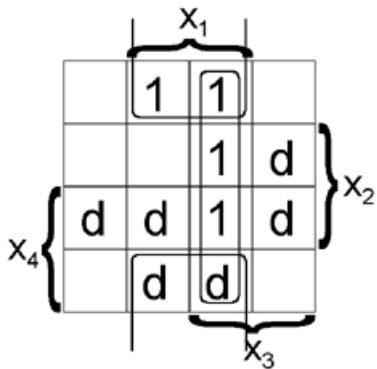


Abbildung 14: Bsp 2.21:  $f_{DMF1}$

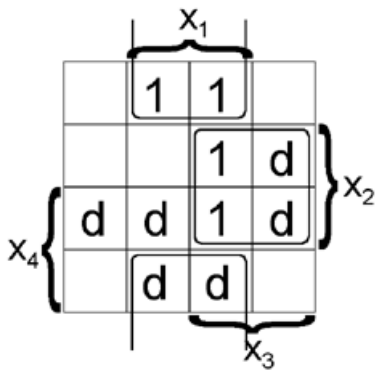


Abbildung 15: Bsp 2.21:  $f_{DMF2}$

$x_1$	$x_2$	
00		Erdgeschoß
01		1. Stock
10		2. Stock
11		3. Stock

Ausgabe(Fahrbefehl):

$y_1$	$y_2$	Wirkung
0	0	halten
0	1	nach oben fahren
1	0	nach unten fahren
1	1	undefiniert

Das bedeutet,  $y_1$  ist für die Fahrtrichtung unten verantwortlich,  $y_2$  für die Fahrtrichtung oben. Was der Hinweis „anhalten wird weiters nicht berücksichtigt“ genau zu bedeuten hat, ist mir persönlich unklar (man kann ja wohl nicht nur eine ein-bittige Ausgabe machen, sodass der Lift auf jeden Fall in eine der beiden Richtung fährt!). Wertetabelle:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

$$y_1 = \overline{x_1} x_3 + \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_4$$

$$y_2 = x_1 \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_4}$$

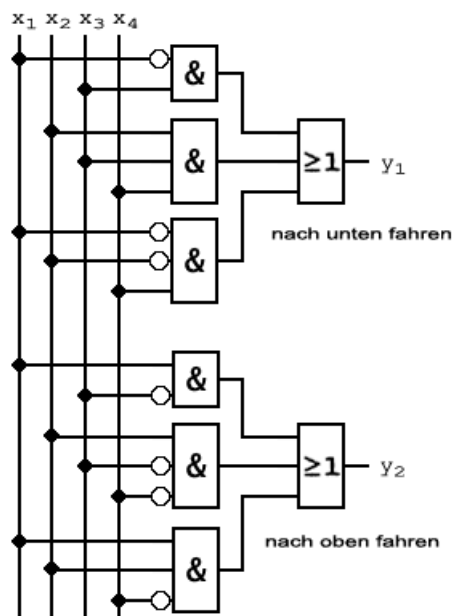


Abbildung 17: Bsp 2.23: Schaltung

- 2.24) a) Wertetabelle für Ausgang k (es wurden wegen der großen Anzahl möglicher Werte ( $2^6 = 64$ ) nur diejenigen Werte eingezeichnet, die zu einer 1 am Ausgang führen, alle nichtaufgeführten Werte sollen zu einer 0 führen):

MSB	LSB			k	Klasse				
0	0	0	6	0	1	1	0	1	2

MSB		LSB				k	Klasse		
		8	1	0	0	0	1	1	
		A	1	0	1	0	1	2	
		E	1	1	1	0	1	3	
1	0	1	E	1	1	1	0	1	4
2	1	0	B	1	0	1	1	1	4
			E	1	1	1	0	1	4
3	1	1	1	0	0	0	1	1	3
			2	0	0	1	0	1	3
			7	0	1	1	1	1	5
			8	1	0	0	0	1	3
			C	1	1	0	0	1	4
			E	1	1	1	0	1	5

Vereinfachung mit Quine McCluskey:

	Minterm								1. Verschmelzung								
	dez.	hex.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$									
1	8	08	0	0	1	0	0	0	x	08,0A	0	0	1	0	-	0	
2	6	06	0	0	0	1	1	0	x	06,0E	0	0	-	1	1	0	
	10	0A	0	0	1	0	1	0	x	0A,0E	0	0	1	-	1	0	
3	14	0E	0	0	1	1	1	0	x	0E,1E	0	-	1	1	1	0	x
	49	31	1	1	0	0	0	1		0E,2E	-	0	1	1	1	0	x
	50	32	1	1	0	0	1	0		3B,3C	1	1	1	-	0	0	
	56	38	1	1	1	0	0	0	x	1E,3E	-	1	1	1	1	0	x
4	30	1E	0	1	1	1	1	0	x	3C,3E	1	1	1	1	-	0	
	43	2B	1	0	1	0	1	1		2E,3E	1	-	1	1	1	0	x
	46	2E	1	0	1	1	1	0	x								
	60	3C	1	1	1	1	0	0	x								
5	55	37	1	1	0	1	1	1									
	62	3E	1	1	1	1	1	0	x								

2. Verschmelzung

0E,2E/1E,3E	-	-	1	1	1	0	
0E,1E/2E,3E	-	-	1	1	1	0	x

Die Primimplikanten der Funktion sind:

31, 32, 2B, 37, (08,0A), (06, 0E), (0A, 0E), (3B, 3C), (3C, 3E), (0E, 2E / 1E, 3E)

Bilden der Restüberdeckung:

	06	08	0A	0E	1E	2B	2E	31	32	37	38	3C	3E
31								x					
32									x				
2B						x							
37										x			
08,0A		x	x										
0A,0E			x	x									
06,0E	x			x									
38,3C											x	x	

	06	08	0A	0E	1E	2B	2E	31	32	37	38	3C	3E
3C,3E												x	x
0E,2E/1E,3E				x	x		x						x

Es gibt genau zwei nicht benötigte Implikanten: (0A, 0E) und (3C,3E).

Die fertige  $f_{DMF}$  sieht dann so aus:

$$f_{DMF} = 31 + 32 + 2B + 37 + 08, 0A + 06, 0E + 38, 3C + 0E, 2E/1E, 3E$$

$$f_{DMF} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$

b) KV-Diagramm:

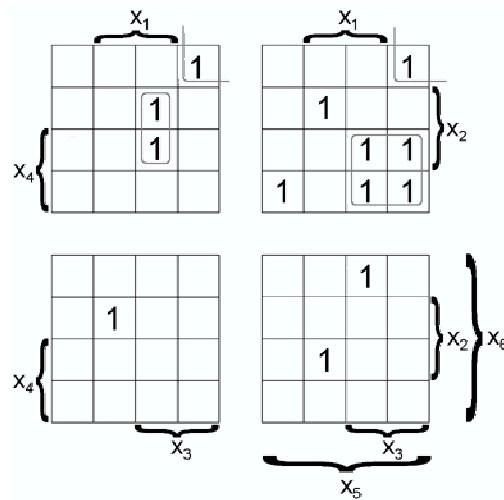


Abbildung 18: Bsp 2.24: KV-Diagramm

Alle eingerahmten Felder können zusammengefasst werden. Ein KV-Diagramm mit 6 Variablen ist beim Zusammenfassen schon recht kompliziert zu handhaben: Benachbart sind zusätzlich zu den „normalen“ Nachbarn wie in einem KV-Diagramm mit 4x4 Feldern (diese Nachbarschaftsregeln gelten hier sogar an den jeweiligen Rändern genau gleich) auch noch solche Felder, die innerhalb eines 4x4 Feldes auf dem selben Platz liegen, allerdings nur wenn die betreffenden 4x4-Felder nebeneinander bzw. untereinander und nicht diagonal liegen. (Siehe dazu auch Abbildung)

Es ergibt sich die selbe  $f_{DMF}$  wie in a)

c) Schaltung:

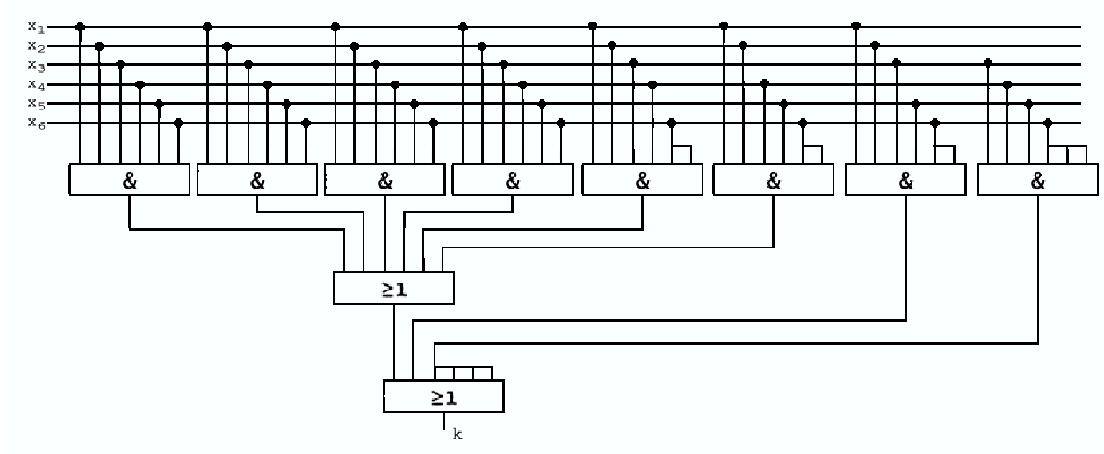


Abbildung 19: Bsp 2.24: Schaltung der  $f_{DMF}$

### 3 Kapitel 3

3.1) a) Wertetabelle eines rückgekoppelten NAND-Gliedes:

$x^t$	$y^t$	$y^{t+1}$	$y^{t+2}$	$y^{t+3}$	$y^{t+4}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1

b) Die beiden unteren Kombinationen ( $x^t = 1, y^t = 0$  und  $x^t = 1, y^t = 1$ ) führen zu keinem stabilen Zustand: Denn 1 und 0 liefern als Ergebnis 1, das heißt es liegen im nächsten Takt zwei Einsen am NAND-Gatter an. Diese zwei Einsen haben als Ergebnis allerdings eine 0, also liegt im darauffolgenden Takt wieder 1 und 0 an. Dieser Vorgang wiederholt sich beliebig oft.

3.2) a) Wertetabelle eines RS-Flip-Flops aus NOR-Gattern:

S	R	$Q^t$	$Q^{t+1}$	$\overline{Q^{t+1}}$	$Q^{t+2}$	$\overline{Q^{t+2}}$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	(0)	(0)	(0)	(0)
1	1	1	(0)	(0)	(0)	(0)

Zwei Anfangszustände ( $R = 0, S = 1, Q^t = 1/R = 1, S = 0, Q^t = 0$ ) werden erst über einen Zwischenschritt erreicht (in dem allerdings kurzfristig ein unzulässiger Zustand an den Ausgängen anliegt). Danach pendeln sie sich aber in einem stabilen Endzustand ein.

b) Die Belegung  $R = S = 1$  führt zu einem unzulässigen Endzustand, nämlich  $Q = \overline{Q} = 0$ . Schaltet man in diesem Zustand nach  $R = S = 0$ , so gerät die Schaltung ins „Toggeln“, d.h. sie schaltet immer wieder hin und her:

S	R	$Q^t$	$\overline{Q^t}$	$Q^{t+1}$	$\overline{Q^{t+1}}$	$Q^{t+2}$	$\overline{Q^{t+2}}$
0	0	0	0	1	1	0	0

3.3) a) Schaltung von  $Q^{t+1}$ , abgelesen aus der Wertetabelle des vorigen Beispiels und vereinfachen zur  $f_{DMF}$ :

$$\begin{aligned}
 Q^{t+1} &= S\overline{R}\overline{Q} + S\overline{R}Q + \overline{S}\overline{R}Q = f_{DKF} \\
 &= S\overline{R}\overline{Q} + S\overline{R}Q + S\overline{R}Q + \overline{S}\overline{R}Q \\
 &= S\overline{R} \underbrace{(\overline{Q} + Q)}_1 + \overline{R}Q \underbrace{(S + \overline{S})}_1 \\
 &= S\overline{R} + \overline{R}Q = f_{DMF}
 \end{aligned}$$

- b) Muss wohl das selbe herauskommen wie in a), was hier aber genau zu tun ist, ist mir unklar.
- c) Ablesen der  $f_{DMF}$  aus dem KV-Diagramm:  
Die Terme in den Konturen ergeben die gleiche  $f_{DMF}$  wie a):

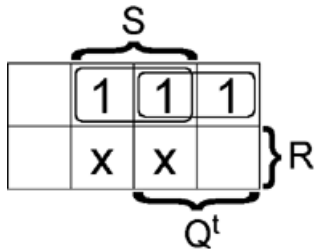


Abbildung 20: Bsp 3.3:  $f_{DMF}$ , Primimplikanden eines RS-Flip-Flops

$$f_{DMF} = S \bar{R} + \bar{R} Q$$

3.4) Wertetabelle eines RS-Flip-Flops aus NAND-Gattern:

$\bar{S}$	$\bar{R}$	$\bar{Q}^t$	$Q^{t+1}$	$Q^{t+1}$	$\bar{Q}^{t+2}$	$Q^{t+2}$
0	0	0	(1)	(1)	(1)	(1)
0	0	1	(1)	(1)	(1)	(0)
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Es ist die selbe Situation wie in Bsp. 3.2) zu bemerken: Es gibt wieder zwei Anfangszustände, die erst nach einem Zwischenschritt einen stabilen und gültigen Endzustand erreichen.

3.5) Im Impulsdiagramm die Taktflanke von  $Q$  ergänzen:

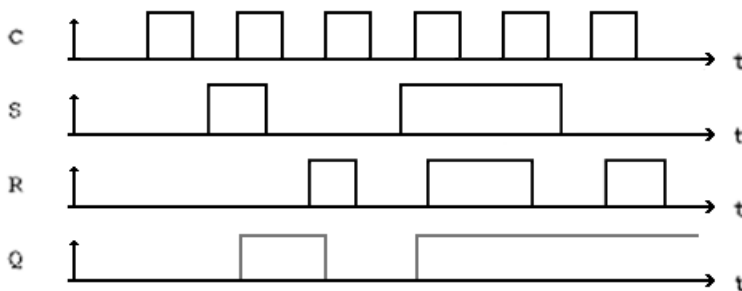


Abbildung 21: Bsp 3.5: Ergänztes Impulsdiagramm

3.6) Wertetabelle eines zustandsgesteuerten D-Flip-Flops:



$C$	$D$	$Q^t$	$Q^{t+1}$	$\overline{Q^{t+1}}$	$Q^{t+2}$	$\overline{Q^{t+2}}$
0	X	0	0	1	0	1
0	X	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

Und wieder gibt es zwei Anfangszustände ( $C = 1, D = 0, Q^t = 1/C = 1, D = 1, Q^t = 0$ ), bei denen zum Erreichen des gewünschten Endzustandes ein Zwischenschritt notwendig ist.

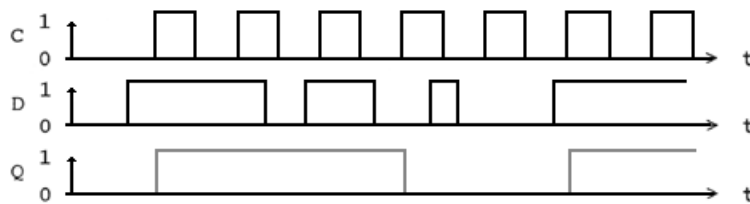


Abbildung 22: Bsp 3.6: Ergänztes Impulsdiagramm

3.7) a)  $f_{DNF}$  der Vorlesung:  $Q^{t+1} = J * \overline{Q^t} + \overline{K} * Q^t$

$J$	$K$	$Q^t$	$Q^{t+1}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

b) Diese  $f_{DKF}$  soll nun mittels Quine McCluskey vereinfacht werden:

Minterm	$J$	$K$	$Q^t$		Term	$J$	$K$	$Q^t$
1	0	0	1	x	1,5	-	0	1
4	1	0	0	x	4,5	1	0	-
5	1	0	1	x	4,6	1	-	0
6	1	1	0	x				

Restüberdeckung:

				$m_1$	$m_4$	$m_5$	$m_6$
1,5	-	0	1	x		x	
4,5	1	0	-		x	x	
4,6	1	-	0		x		x

Die beiden wesentlichen Primimplikanten,  $\overline{K} Q^t, J \overline{Q^t}$  decken bereits alle

Minterme ab! Die  $f_{DMF}$  lautet daher:  
 $f_{DMF} = \overline{K} Q^t + J \overline{Q}^t$

- c) c1)
- c2)
- d) Belegung e):  $J = 1, K = 0, Q^t = 0$ :

t	$Q^t$	$\overline{Q}^t$
0	0	1
1	1	1
2	1	0
3	1	0

Bereits nach einem Zwischenschritt ist die Schaltung wieder in einem stabilen, gültigen Endzustand.

Belegung e):  $J = 1, K = 1, Q^t = 0$ :

t	$Q^t$	$\overline{Q}^t$
0	0	1
1	1	0
2	0	1
3	1	0
4	0	1
5	1	0

Bei dauerhafter Belegung mit  $J = K = 1$  schaltet das Flip-Flop ständig hin und her, allerdings ist immer ein gültiger Zustand garantiert ( $Q \neq \overline{Q}$ )

3.8) Im Impulsdiagramm die Taktflanke von  $J_2, K_2, Q$  ergänzen:

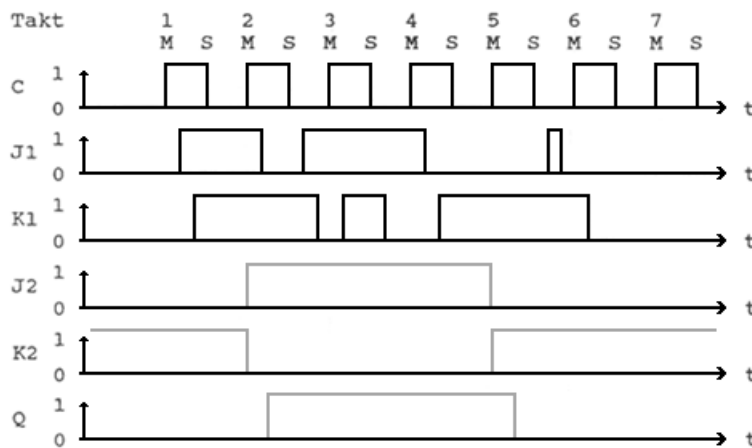


Abbildung 23: Bsp 3.8: Ergänztes Impulsdiagramm

3.9) Die benötigte Anzahl Flip-Flops entspricht  $\lceil \log_2(m) \rceil$   
 (Auf deutsch heißt das: die nächstgrößere ganze Zahl des Logarithmus Dualis der gegebenen Zahl m)

Ein kleines Beispiel: Für ein aus einem Zustandsgraphen mit 13 Zuständen aufgebautes Schaltwerk benötigt man  $\lceil \log_2(13) \rceil = \lceil 3.7004 \rceil = 4$  Flip-Flops.

- 3.10) a) Es werden  $\lceil \log_2(4) \rceil = 2$  Flip-Flops benötigt. Für die Lichter sollte es 3 Ausgänge geben, nämlich je einen für jede der 3 verschiedenen Farben. Die Codierung der Zustände erfolgt im Hinblick auf mögliche Defekte so, dass die Kombination von Nullen in beiden Flip-Flops zur Anzeige „rot“ an der Ampel führt. Ich verwendete eine Art Taktgeber, also einen Eingang, an dem immer dann, wenn umgeschaltet werden soll, eine Eins anliegt (Ansonsten könnte die Schaltgeschwindigkeit der Ampel nur durch die Schaltzeiten der Gatter bestimmt werden; bei Schaltzeiten von wenigen Nano- bzw. Mikrosekunden wie bei modernen Bausteinen wäre das bei einer Ampel nicht zielführend)
- b) Zuerst ist der Zustandsgraph zu erstellen: In der folgenden Wahrheitsta-

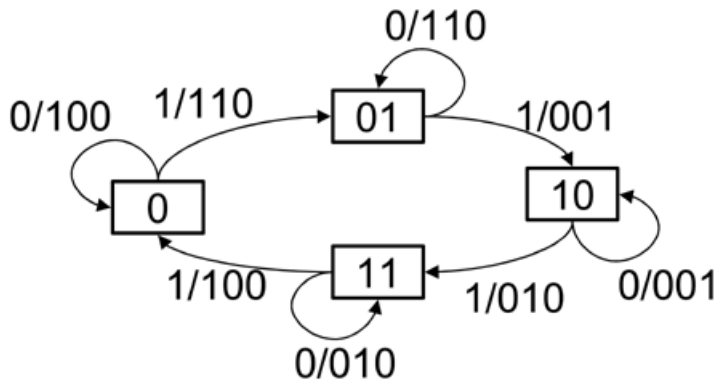


Abbildung 24: Bsp 3.10: Zustandsgraph des Huffmann-Modells

belle der Übergangsfunktion wurde für die Ausgänge folgende Codierung gewählt:

$x_1$	$x_2$	Zustand	$y_1$ =rot	$y_2$ =gelb	$y_3$ =grün
0	0	rot	1	0	0
0	1	rot und gelb	1	1	0
1	0	grün	0	0	1
1	1	gelb	0	1	0

Die letzten vier Spalten beinhalten bereits die jeweils für den Zustandsübergang dieser Zeile benötigten Werte für die Eingänge  $J$  und  $K$  der beiden Flip-Flops, abzulesen aus der nachfolgenden Tabelle für die Übergänge eines JK-FF's. Weiters ist zu beachten, dass der Zustand der Ampel, also welche Lichter gerade leuchten, mit dem Folgezustand zusammenhängt und nicht mit dem aktuellen.

$FF^t$		Eingang	$FF^{t+1}$		Ausgänge			$FF_1$		$FF_2$	
$x_1$	$x_2$	e	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$J_1$	$K_1$	$J_2$	$K_2$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	d	0	d
0	0	1	0	1	1	1	0	0	d	1	d
0	1	0	0	1	1	1	0	0	d	d	0

$FF^t$		Eingang	$FF^{t+1}$		Ausgänge			$FF_1$		$FF_2$	
$x_1$	$x_2$	$e$	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$J_1$	$K_1$	$J_2$	$K_2$
0	1	1	1	0	0	0	1	1	d	d	1
1	0	0	1	0	0	0	1	d	0	0	d
1	0	1	1	1	0	1	0	d	0	1	d
1	1	0	1	1	0	1	0	d	0	d	0
1	1	1	0	0	1	0	0	d	1	d	1

$Q^t$	$Q^{t+1}$	$J$	$K$
0	0	0	d
0	1	1	d
1	0	d	1
1	1	d	0

Eine Vereinfachung der Schaltfunktionen mittels KV-Diagramm ergibt:

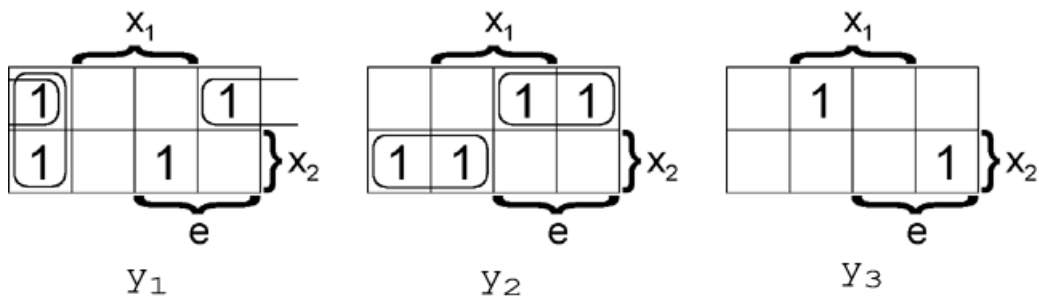


Abbildung 25: Bsp 3.10: KV-Diagramme der Ausgänge

$$y_1 = \bar{x}_1 \bar{e} + \bar{x}_1 x_2 e + x_1 x_2 e \quad y_2 = x_2 \bar{e} + \bar{x}_2 e \quad y_3 = x_1 \bar{x}_2 \bar{e} + \bar{x}_1 x_2 e$$

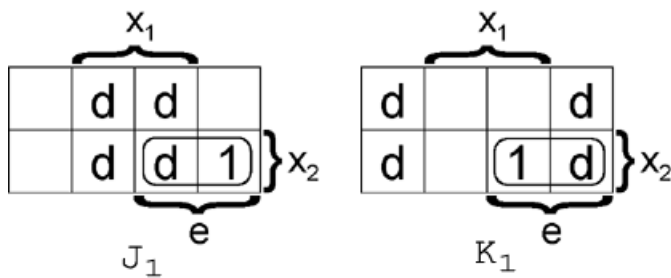


Abbildung 26: Bsp 3.10: KV-Diagramme von J und K von FF 1

$$J_1 = e x_2 \quad K_1 = e x_2$$

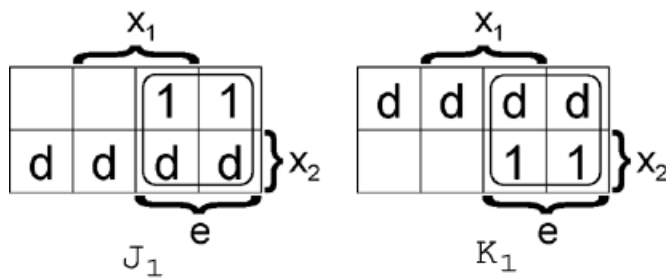


Abbildung 27: Bsp 3.10: KV-Diagramme von J und K von FF 2

$$J_2 = e \quad K_1 = e$$

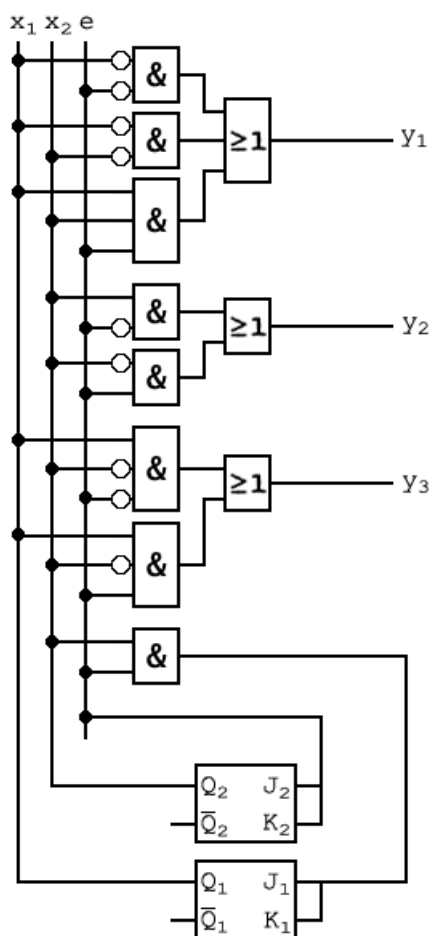


Abbildung 28: Bsp 3.10: Schaltung

- 3.11) Es ist hier ein ein-bittiger Speicher notwendig; dieser speichert, ob das bisherige Ergebnis modulo 2 eine 1 oder eine 0 ergab. 0 steht im Speicher wenn die bisherige Zahl durch 2 restfrei teilbar, also gerade war. 1 wiederum bedeutet, dass die bisherige Summe ungerade war. Zwei ungerade Zahlen addiert

ergeben eine gerade, eine gerade und eine ungerade Zahl addiert ergeben eine ungerade, eine gerade addiert mit einer geraden ergibt eine gerade Zahl. Daraus ergibt sich bei einer geraden Zahl als Eingabe (also einer 0), eine Ausgabe gleich der Ausgabe des vorigen Taktes, ansonsten genau das Gegenteil:

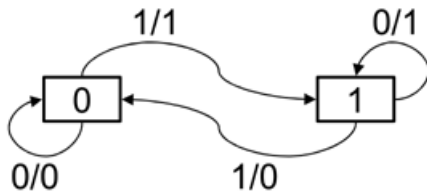


Abbildung 29: Bsp 3.11: Zustandsgraph

$s_{i-1}$	$x_i$	$s_i$	$J$	$K$
0	0	0	0	d
0	1	1	1	d
1	0	1	d	0
1	1	0	d	1

Die bereits eingetragenen J- und K-Werte für das Flip-Flop sind der Übergangstabelle für ein JK-Flip-Flop entnommen (siehe z.B. Bsp 3.10)

Nun müssen die Schaltfunktionen dieser Wertetabelle noch vereinfacht werden, z.B. mittels KV-Diagrammen:

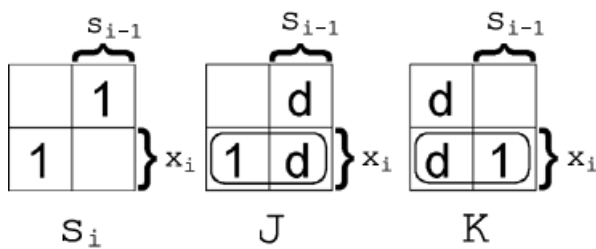


Abbildung 30: Bsp 3.11: Schaltfunktionen im KV-Diagramm

Es ergeben sich folgende Schaltfunktionen:

$$s_i = \bar{s}_{i-1} x_i + s_{i-1} \bar{x}_i \quad J = x_i \quad K = x_i$$

und daraus wiederum folgendes Huffmann-Modell mit JK-FF's:

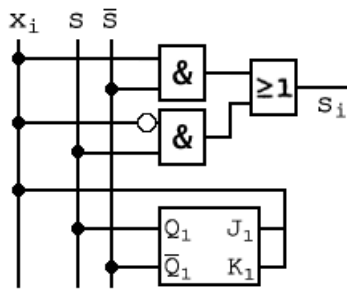


Abbildung 31: Bsp 3.11: Schaltung

- 3.12) a) Um die Bitfolge 011 zu erkennen, muss man zusätzlich zu dem einen gegebenen Eingangsbit die zwei zuletzt eingegebenen Bits speichern (somit hat man dann jedes Mal insgesamt die drei letzten Bits zur Verfügung). Es sind also 2 Flip-Flops notwendig, es ergeben sich  $2^2 = 4$  Zustände:

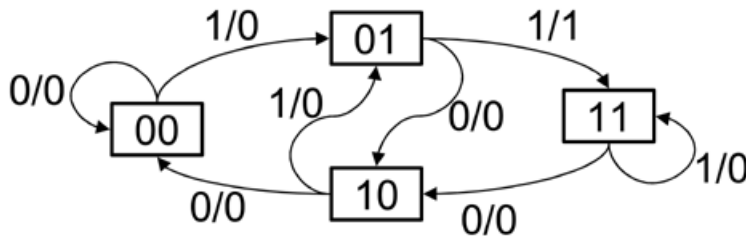


Abbildung 32: Bsp 3.12: Zustandsgraph

- b) Die aus dem Zustandsgraph erstellte Wertetabelle:

$FF^t$		Eingang $e$	$FF^{t+1}$		Ausgang $a$	$FF_1$		$FF_2$	
$x_1$	$x_2$		$x_1$	$x_2$		$J_1$	$K_1$	$J_2$	$K_2$
0	0	0	0	0	0	d	0	d	
0	0	1	0	1	0	d	1	d	
0	1	0	1	0	0	1	d	d	
0	1	1	1	1	1	1	d	0	
1	0	0	0	0	0	d	1	0	
1	0	1	0	1	0	d	1	d	
1	1	0	1	0	0	d	0	d	
1	1	1	1	1	0	d	0	0	

Auch hier wurde in den letzten 4 Spalten bereits die Übergangsfunktionen für die beiden Flip-Flops eingetragen (laut Übergangstabelle eines JK-Flip-Flops, siehe z.B. Bsp 3.10)

Der Ausgang  $a$  ist nur bei genau einer Kombination von Eingangs- bzw. Speicherwerten 1. Dies entspricht einem Minterm, eine weitere Vereinfachung ist also nicht möglich.  $a = \bar{x}_1 x_2 e$

Vereinfachung der übrigen Schaltfunktionen mittels KV-Diagramm:

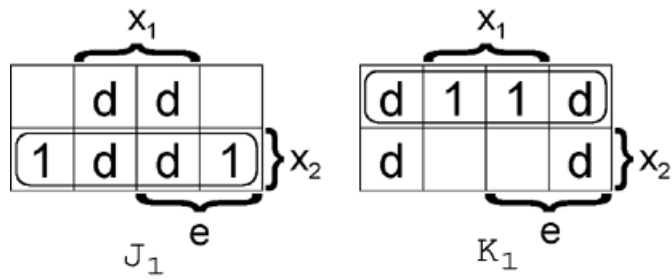


Abbildung 33: Bsp 3.12: Schaltfunktionen des FF1 im KV-Diagramm

$$J_1 = x_2 \quad K_1 = \bar{x}_2$$

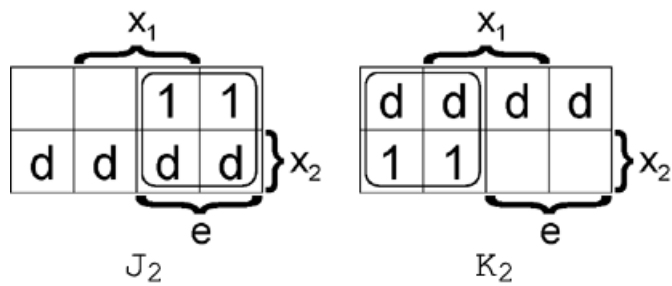


Abbildung 34: Bsp 3.12: Schaltfunktionen des FF2 im KV-Diagramm

$$J_2 = e \quad K_2 = \bar{e}$$

Diese Schaltfunktionen ergeben, mit JK-MS-Flip-Flops realisiert, folgendes Schaltbild:

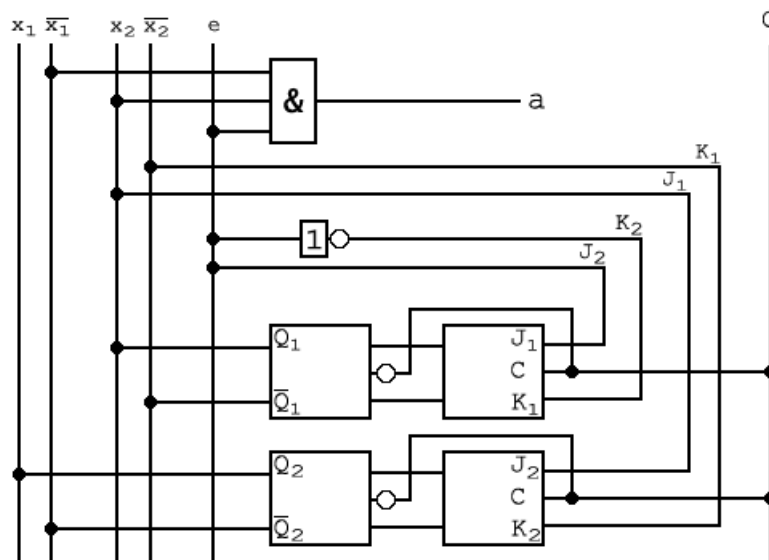


Abbildung 35: Bsp 3.12: Schaltung



- 3.13) a) Bei längerer Betrachtung des Zustandsgraphen aus Beispiel 3.12 fällt auf, dass aus dem Zustand 10 mit gleichen Eingaben gleiche Folgezustände erreicht werden wie aus dem Zustand 00: Gibt man eine 0 ein, gelangt man in den Zustand 00, gibt man eine 1 ein, gelangt man in den Zustand 01. Es ist also folgende Vereinfachung des Zustandsgraphen möglich:

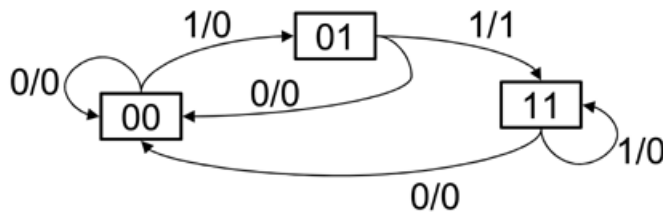


Abbildung 36: Bsp 3.13: Vereinfachter Zustandsgraph

Da  $\lceil \log_2(3) \rceil = 2$  ergibt sich die gleiche Anzahl an benötigten Flip-Flops.

$FF^t$		Eingang	$FF^{t+1}$		Ausgang	$FF_1$		$FF_2$	
$x_1$	$x_2$	$e$	$x_1$	$x_2$	$a$	$J_1$	$K_1$	$J_2$	$K_2$
0	0	0	0	0	0	0	d	0	d
0	0	1	0	1	0	0	d	1	d
0	1	0	0	0	0	0	d	d	0
0	1	1	1	1	1	1	d	d	0
x	x	x	-	-	-	-	-	-	-
x	x	x	-	-	-	-	-	-	-
1	1	0	0	0	0	d	1	d	1
1	1	1	1	1	0	d	0	d	0

- b) Der Ausgang  $a$  ist wie in Bsp. 3.12 nur bei genau einer Kombination von Eingangs- bzw. Speicherwerten 1. Dies entspricht einem Minterm, eine weitere Vereinfachung ist also nicht möglich.  $a = \bar{x}_1 x_2 e$   
 Vereinfachung der übrigen Schaltfunktionen mittels KV-Diagramm:

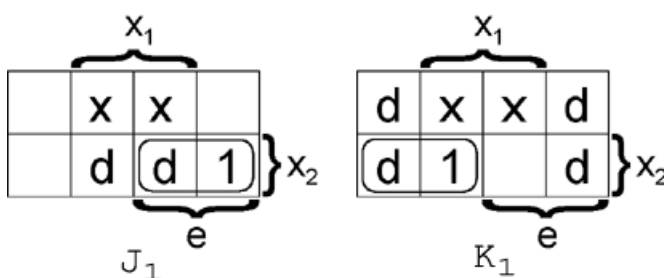


Abbildung 37: Bsp 3.13: Schaltfunktionen des FF1 im KV-Diagramm

$$J_1 = x_2 e \quad K_1 = x_2 \bar{e}$$

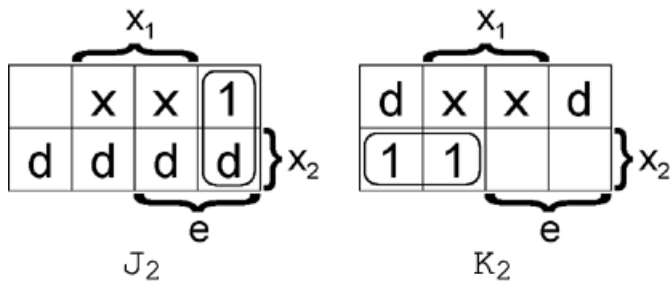


Abbildung 38: Bsp 3.13: Schaltfunktionen des FF2 im KV-Diagramm

$$J_2 = \bar{x}_1 e \quad K_2 = x_2 \bar{e}$$

Diese Schaltfunktionen ergeben, mit JK-MS-Flip-Flops realisiert, folgendes Schaltbild:

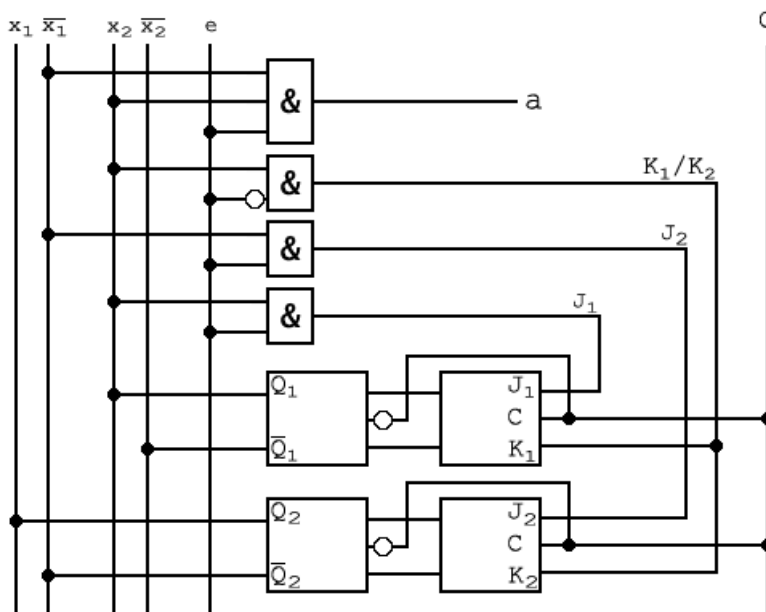


Abbildung 39: Bsp 3.13: Schaltung

An der Schaltung (vor allem an der Anzahl der benötigten Gatter) kann man erkennen, dass in diesem Fall die Vereinfachung des Zustandsgraphen zu keiner Vereinfachung der Schaltung geführt hat, eher das Gegenteil ist der Fall.

3.14) Hier noch einmal der Zustandsgraph (entspricht dem 2. Graphen der Angabe):

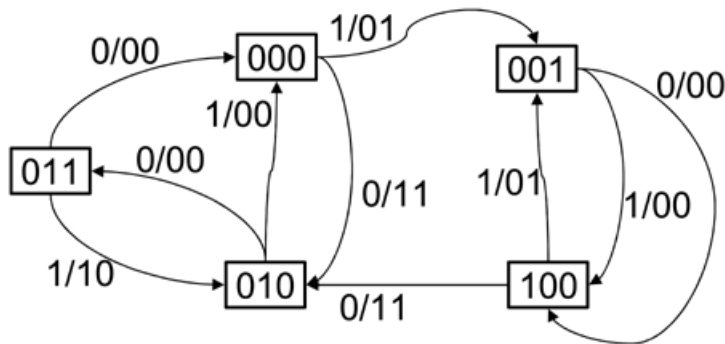


Abbildung 40: Bsp 3.14: Zustandsgraph

Da es 5 Zustände gibt, werden 3 Flip-Flops benötigt. Diese Flip-Flops könnten aber bis zu 8 Zustände speichern. Es wäre aber riskant, diesen Umstand auszunützen und für eine Schaltungsvereinfachung zu benützen.

$FF^t$			Eingang	$FF^{t+1}$			Ausgänge		$FF_1$		$FF_2$		$FF_3$	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$H$	$R$	$J_1$	$K_1$	$J_2$	$K_2$	$J_3$	$K_3$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	d	1	d	0	d
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	d	0	d	1	d
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	d	0	d	d	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	d	0	d	d	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	d	d	0	1	d
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	d	d	1	0	d
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	d	d	0	d	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	d	d	0	d	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	d	1	1	d	0	d
1	0	0	1	0	0	1	0	1	d	1	0	d	1	d

Die Schaltfunktionen der Ausgänge vereinfachen im KV-Diagramm:

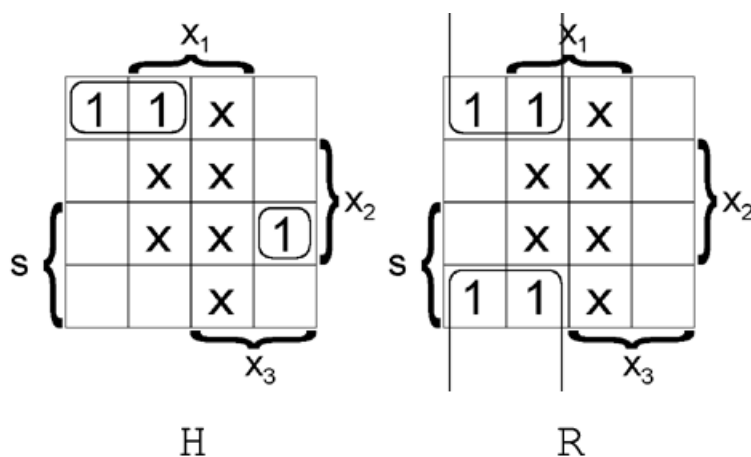


Abbildung 41: Bsp 3.14: Schaltung der Ausgänge

$$H = \overline{x_1} x_2 x_3 s + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{s} \quad R = \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Das gleiche nun für  $J$  und  $K$  der drei Flip-Flops:

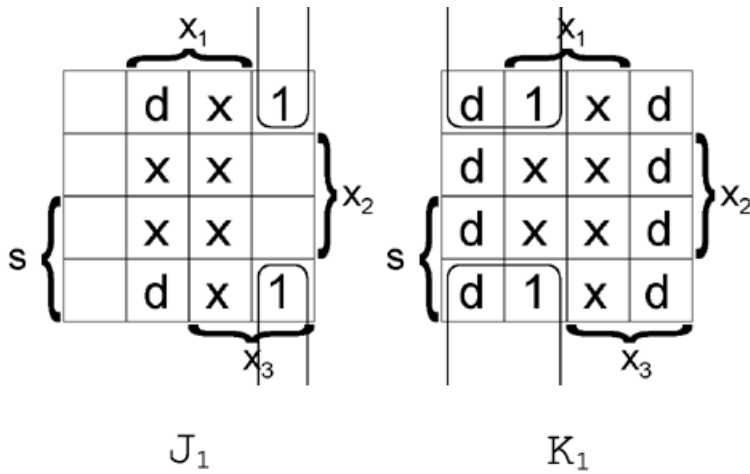


Abbildung 42: Bsp 3.14: Schaltung des FF1 im KV-Diagramm

$$J_1 = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \quad K_1 = \overline{x_2} \overline{x_3}$$

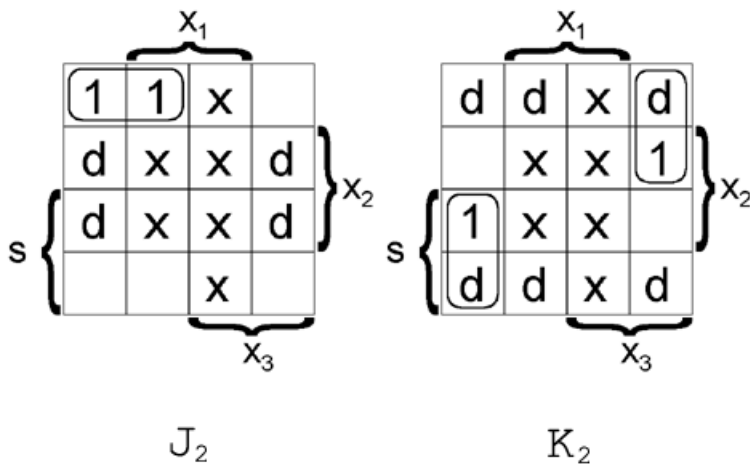


Abbildung 43: Bsp 3.14: Schaltung des FF2 im KV-Diagramm

$$J_2 = \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{s} \quad K_2 = \overline{x_1} \overline{x_3} s + \overline{x_1} x_3 \overline{s}$$

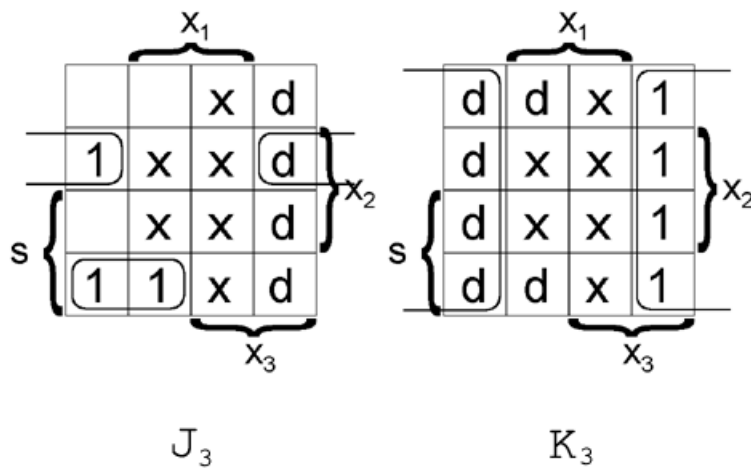


Abbildung 44: Bsp 3.14: Schaltung des FF3 im KV-Diagramm

$$J_3 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 s + \bar{x}_1 x_2 \bar{s} \quad K_3 = \bar{x}_1$$

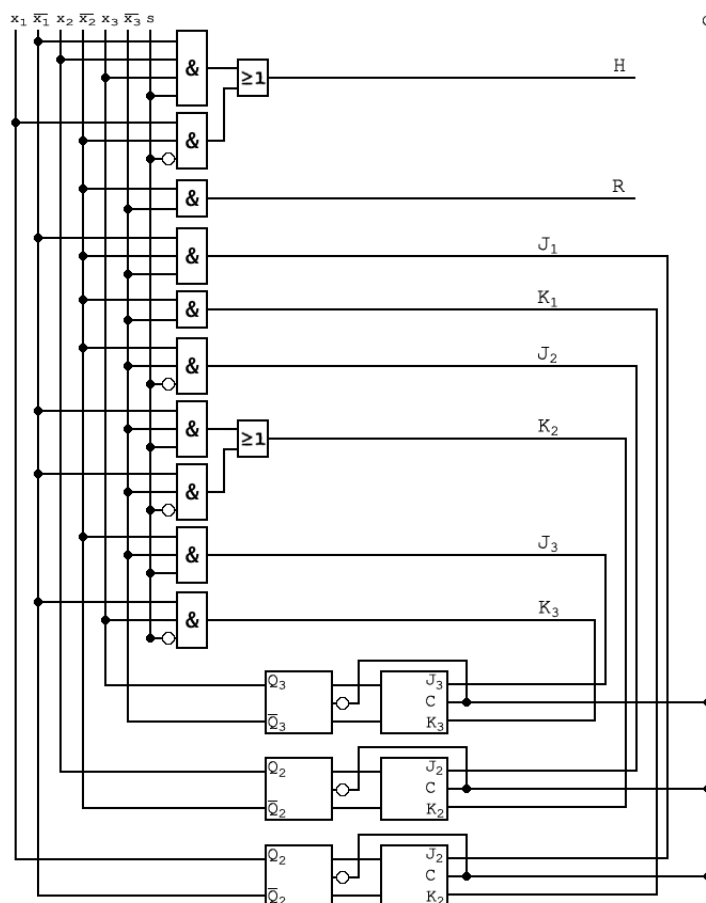


Abbildung 45: Bsp 3.14: Schaltung des Huffmann-Modells

- 3.15) a) Es ergibt sich der Zustand 4 als überflüssig: Vom Zustand 0 aus wird bei der selben Eingabe die gleiche Ausgabe und der gleiche Endzustand erreicht. Alle auf den Zustand 4 verweisenden Übergänge (Es gibt nur einen solchen, von 1 aus) müssen also auf 0 umgebogen werden. Es ergibt sich der folgende, vereinfachte Zustandsgraph mit 4 Zuständen (0-3):

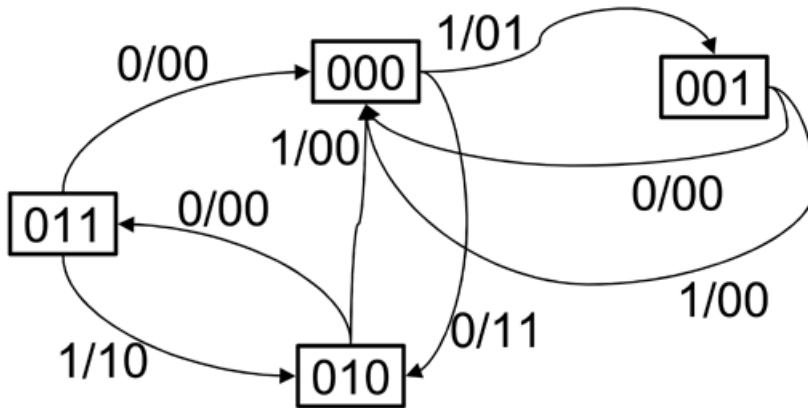


Abbildung 46: Bsp 3.15: Vereinfachter Zustandsgraph von 3.14

- b) Für diese Vereinfachung ergibt sich eine beträchtliche Verminderung der Schaltungskomplexität, denn die Anzahl der benötigten Flip-Flops sinkt: Für die 4 nun vorhandenen Zustände benötigt man nur mehr 2 Flip-Flops!

$FF^t$		Eingang	$FF^{t+1}$				Ausgänge		$FF_1$		$FF_2$	
$x_1$	$x_2$	$s$										
0	0	0	1	0	1	1	1	d	0	d	d	
0	0	1	0	1	0	1	1	0	d	1	d	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	d	d	1	
0	1	1	0	0	0	0	0	0	d	d	1	
1	0	0	1	1	0	0	0	d	0	1	d	
1	0	1	0	0	0	0	0	d	1	0	d	
1	1	0	0	0	0	0	0	d	1	d	1	
1	1	1	1	0	1	0	0	d	0	d	1	

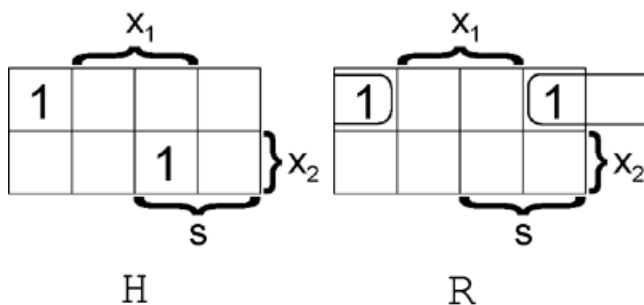


Abbildung 47: Bsp 3.15: Schaltung der Ausgänge im KV-Diagramm

$$H = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{s} + x_1 x_2 s \quad R = \overline{x_1} \overline{x_2}$$

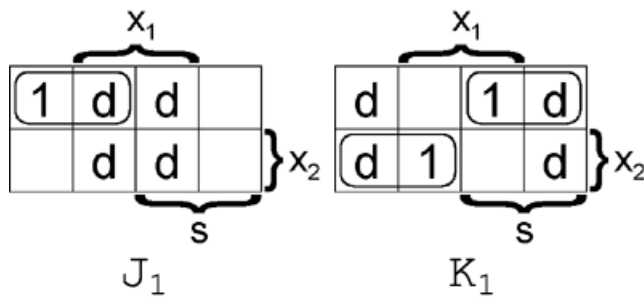


Abbildung 48: Bsp 3.15: Schaltung des FF1 im KV-Diagramm

$$J_1 = \overline{x_1} \overline{s} \quad K_1 = x_2 \overline{s} + \overline{x_2} s$$

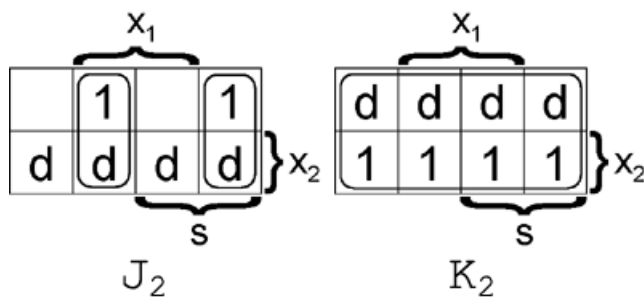


Abbildung 49: Bsp 3.15: Schaltung des FF2 im KV-Diagramm

$$J_2 = x_1 \overline{s} + \overline{x_1} s \quad K_2 = 1$$

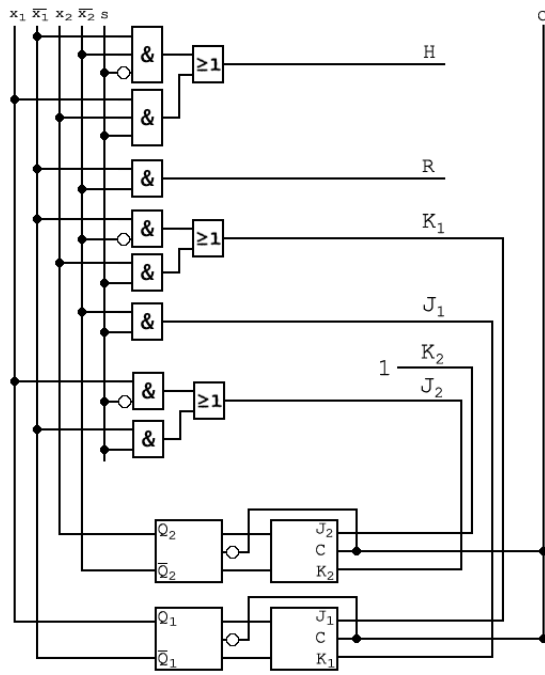


Abbildung 50: Bsp 3.15: Schaltung

3.16)



## 4 Kapitel 4

4.1) Die Wertetabelle für einen Multiplexer mit 3 Eingängen:

$s_0$	$s_1$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$f$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	x
1	1	0	0	1	x
1	1	0	1	0	x
1	1	0	1	1	x
1	1	1	0	0	x
1	1	1	0	1	x
1	1	1	1	0	x
1	1	1	1	1	x

Diese Wertetabelle lässt sich auch viel einfacher aufschreiben:

$s_0$	$s_1$	$f$
0	0	$x_0$
0	1	$x_1$
1	0	$x_2$
1	1	-

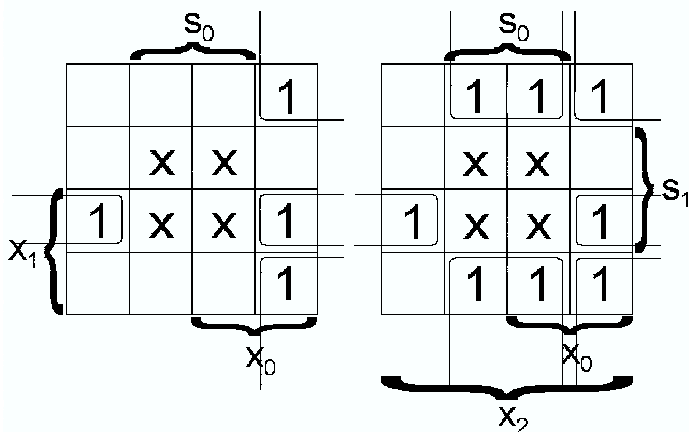


Abbildung 51: Bsp 4.1: KV-Diagramm

Aus der vereinfachten Wertetabelle oder aus dem KV-Diagramm lässt sich dann die Schaltfunktion relativ einfach bestimmen:

$$f_{DMF} = \overline{s_0} \overline{s_1} x_0 + \overline{s_0} s_1 x_1 + s_0 \overline{s_1} x_2$$

Die dazugehörige Schaltung sieht so aus:

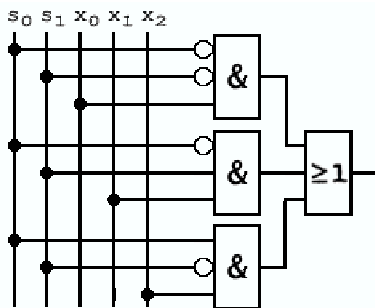


Abbildung 52: Bsp 4.1: Schaltung

- 4.2) Bei den angegebenen Multiplexern wird bei Anliegen einer 0 der linke Eingang durchgeschaltet, bei einer 1 der rechte. In der Graphik erkennt man den durchgeschalteten Minterm daran, dass die eingezeichneten Wege nur zu einem Minterm eine durchgehende Linie bilden. Dies ist in diesem Fall  $M_4$ ; dieser Minterm ist über den ersten und zweiten Multiplexer, bei denen jeweils der linke Eingang ausgewählt ist und schließlich über den letzten Multiplexer, der den rechten Eingang auswählt, mit dem Ausgang direkt verbunden. Jeder andere Eingang hängt sonst irgendwo in der Luft".

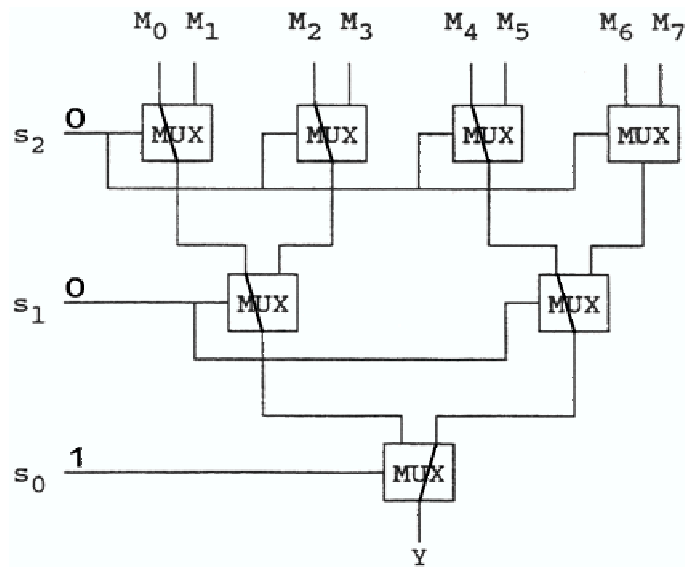


Abbildung 53: Bsp 4.2: Weg durch einen  $2^3$  Multiplexer

4.3) In der Tabelle ist sozusagen für  $B$  und  $D$  in die gegebene Funktion einzusetzen. Die ergänzte Tabelle der Angabe sieht dann so aus:

$S_1$	$S_0$	$f$	$f$	Eingänge
$B$	$D$	$A + B D + C D + \bar{B} \bar{D}$	vereinfacht	
0	0	$A + 0 + 0 + 1$	1	$E_0 = 1$
0	1	$A + 0 + C + 0$	$A + C$	$E_1 = A + C$
1	0	$A + 0 + 0 + 0$	$A$	$E_2 = A$
1	1	$A + 1 + C + 0$	1	$E_3 = 1$

Daraus ergibt sich folgende Schaltung:

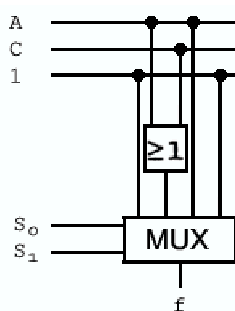


Abbildung 54: Bsp 4.3: Schaltung einer Funktion mit einem Multiplexer

4.4) Wahrheitstabelle des Codierers (An alle freigelassenen Plätze gehört eine 0):

Minterme													Ausgänge				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
1														0	0	0	0

Minterme														Ausgänge			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
	1													0	0	0	1
		1												0	0	1	0
			1											0	0	1	1
				1										0	1	0	0
					1									0	1	0	1
						1								0	1	1	0
							1							0	1	1	1
								1						1	0	0	0
									1					1	0	0	1
										1				1	0	1	0
											1			1	0	1	1
												1		1	1	0	0
													1	1	0	1	

Die Funktionen für die Ausgänge ergeben sich direkt aus den Eingängen; eine Vereinfachung ist nirgends möglich, da jeder Eingang nur jeweils zu genau einer Gelegenheit eine 1 liefert:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \\
 y_1 &= x_4 + x_6 + x_7 + x_{12} + x_{13} \\
 y_2 &= x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_{10} + x_{11} \\
 y_3 &= x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{13}
 \end{aligned}$$

Die Schaltung enthält bereits die beiden Varianten a) und b), je nachdem welcher Ausgang jeweils abgegriffen wird:

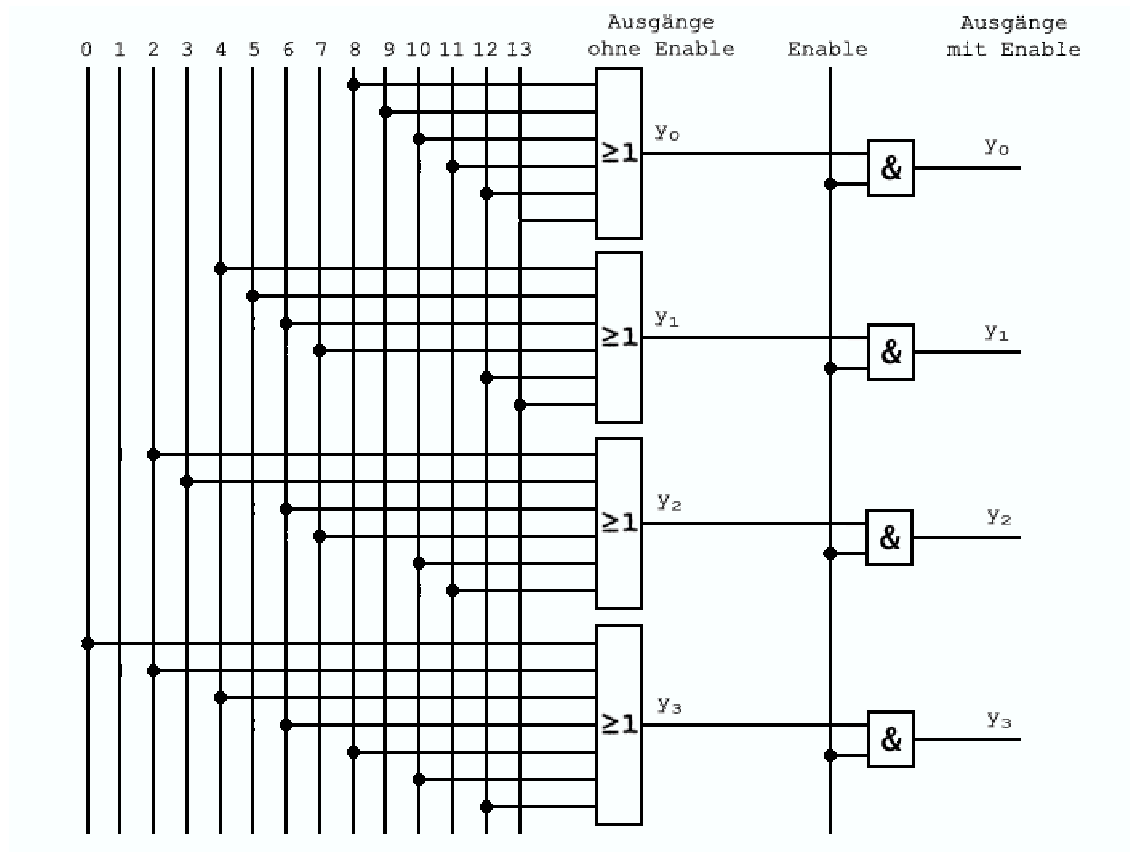


Abbildung 55: Bsp 4.4: Schaltung eines Codierers

4.5) Die Funktionsweise (Wahrheitstabelle) eines Standard-Adressdecoders sieht so aus:

Eingänge			Ausgänge							
$x_0$	$x_1$	$x_2$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Eine der gewünschten Funktionen ist bereits direkt ablesbar: Am Ausgang  $z_7$  liegt bereits das für  $Y_1$  gewünschte Ergebnis an;  $Y_1$  lässt sich hier also direkt anschließen. Auch  $Y_2$  ist mit einfachen Mitteln zu erreichen: Der Ausgang  $z_0$  des Decoders liefert das genaue bitweise Gegenteil des Gewünschten; ein Invertieren (mit einem NOT-Gatter) führt also genau zum gewünschten Ergebnis. Ein wenig komplizierter wird es bei  $Y_3$ : Hier müssen die 4 Ausgänge, die die gewünschten Einsen liefern ( $z_1, z_2, z_3, z_7$ ) mittels ODER-Gatter verknüpft

werden.

Die fertige Schaltung sieht schließlich so aus:

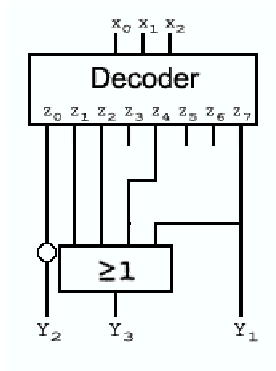


Abbildung 56: Bsp 4.5: Schaltung von drei Funktionen mit einem Decoder

4.6)

4.7) a)  $x = 3_{10} = 0011_2, y = 6_{10} = 0110_2$

3	0	0	1	1
6	0	1	1	0
Carry in	0	1	1	0
Ergebnis	1	0	0	1

b) Die Zahlen und deren einzelne Bits werden für die Berechnung nach der Carry-Look-Ahead-Technik durchnummeriert:

Bit	$x = 3$	$y = 6$
0	1	0
1	1	1
2	0	1
3	0	0

Die Carry-Look-Ahead-Technik ergibt für die einzelnen Überträge (Carries) folgende Werte ( $c_i$  entspricht dem Carry In):

$$\begin{aligned}
 c_i &= 0 \\
 c_0 &= x_0 y_0 \\
 &= 10 = 0 \\
 c_1 &= x_1 y_1 + x_1 c_0 + y_1 c_0 \\
 &= x_1 y_1 + x_1 x_0 y_0 + y_1 x_0 y_0 \\
 &= 11 + 110 + 110 = 1 \\
 c_2 &= x_2 y_2 + x_2 c_1 + y_2 c_1 \\
 &= x_2 y_2 + x_2 x_1 y_1 + x_2 x_1 x_0 y_0 + x_2 y_1 x_0 y_0 + y_2 x_1 y_1 + y_2 x_1 x_0 y_0 + y_2 y_1 x_0 y_0 \\
 &= 01 + 011 + 0110 + 0110 + 111 + 1110 + 1110 = 1
 \end{aligned}$$

Mit diesen Überträgen (die in einem realen Addierwerk natürlich parallel berechnet werden) kann man an die Berechnung der einzelnen Stellen

gehen ( $\oplus$  steht für das exklusive Oder XOR):

$$\begin{aligned}
 s_0 &= x_0 \oplus y_0 \oplus c_i \\
 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\
 s_1 &= x_1 \oplus y_1 \oplus c_0 \\
 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\
 s_2 &= x_2 \oplus y_2 \oplus c_1 \\
 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\
 s_3 &= x_3 \oplus y_3 \oplus c_2 \\
 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet damit wie erwartet  $1001_2 = 9_{10}$

4.8)

4.9)

4.10) Ergänzt sieht das Impulsdigramm so aus:

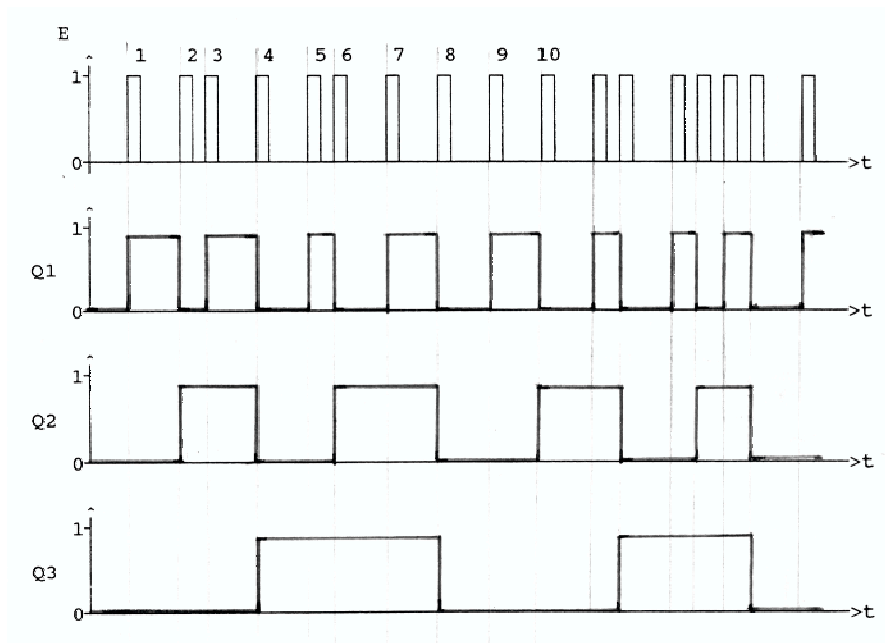


Abbildung 57: Bsp 4.10: Impulsdigramm

Zur Erklärung: Der erste Flip-Flop schaltet immer dann, wenn an seiner Clock eine 1 anliegt. Diese Clock ist direkt mit dem Eingang E verbunden; d.h. er schaltet immer wenn an E eine 1 kommt. Flip-Flop 2 wiederum schaltet genau dann, wenn  $\overline{Q_1}$  eine 1 liefert. Dies passiert genau halb so oft wie das Umschalten von Flip-Flop 1. Flip-Flop 3 wird dann umgeschaltet, wenn  $\overline{Q_2}$  eine 1 liefert. Dies passiert auch wieder nur halb so oft wie Flip-Flop 2 umschaltet. Insgesamt ist diese Schaltung also ein Modulo-8 Zähler (d.h. wenn man die

Zustände der Flip-Flops 1 bis 3 als Zahl betrachtet -  $Q_3 Q_2 Q_1$  - so ergibt dies die Anzahl der eingegangenen Einsen Modulo 8):

$$Q_3 Q_2 Q_1 = E \text{ mod } 8$$

4.11)

4.12) Die Multiplikation läuft folgendermaßen ab: Der Multiplikand wird in ein Feld geschrieben. Ist das links-äußerste Bit eine 1, so wird der Multiplikator so weit links in die Zeile unter der jetzigen geschrieben, dass er den Multiplikand gerade nicht mehr überdeckt. Dann werden die beiden Zeilen bitweise addiert. Anschließend erfolgt eine Verschiebung der Bits nach rechts (das rechts-äußerste Bit wird verworfen). Anschließend wird die genannte Operation solange wiederholt, bis jenes Bit an der rechtsäußersten Stelle steht, welches für das Vorzeichen zuständig ist. Das Ergebnis ist nun diese Zeile ohne das letzte Bit.

0	0 0 0 0	1 0 1 1	1	* 0 1 0 1 1
	1 0 1 1			
	1 0 1 1	1 0 1 1	1	
	0 1 0 1	1 1 0 1	1	
	1 0 1 1			
1	0 0 0 0	1 1 0 1	1	
	1 0 0 0	0 1 1 0	1	
	1 0 1 1			
1	0 0 1 1	0 1 1 0	1	
	1 0 0 1	1 0 1 1	0	
	0 0 0 0			
	1 0 0 1	1 0 1 1	0	
	0 1 0 0	1 1 0 1	1	$1 \oplus 0 = 1 \Rightarrow (1,01001101)_2 = 0,30078125$

Die Xor-Operation in der letzten Zeile verknüpft das Vorzeichen des Multiplikanden (1) mit dem des Multiplikators (1); was hier herauskommt ist das Vorzeichen des Ergebnisses. An Hardware wird benötigt: 2 5Bit-Register M & Q, 1 10Bit-Register, 1 4Bit-Paralleladdierer, Shiftoperation

4.13)

	Verglichene Modelle	Benchmark	Speedup	Geschwindigkeitsverbesserung
a)	VAX 8600 / VAX-11/780	Linpack	2,902	190,18 %
		Dhrystone	3,378	237,79 %
b)	VAX 8550 / VAX 8600	Linpack	2,859	185,96 %
		Dhrystone	2,123	112,35 %
c)	VAX 8550 / VAX-11/780	Linpack	8,298	729,82 %
		Dhrystone	7,173	617,28 %

4.14)

4.15)



4.16) Summe der Instruktionen: 100.000

$$CPI = \sum_{i=0}^n p_i * CPI_i$$

$$p_0 = 45.000/100.000 = 0,45$$

$$p_1 = 0,32$$

$$p_2 = 0,15$$

$$p_3 = 0,08$$

$$CPI = 1 * 0,45 + 2 * 0,32 + 2 * 0,15 + 2 * 0,08 = 1,55$$

$$\text{Instruktionen pro Sekunde} = \frac{\text{Takte pro Sekunde}}{\text{Takte pro Instruktion}} = \frac{40 * 10^6}{1,55} = 25,806 \text{ MIPS}$$

$$\begin{aligned} \text{Ausführungszeit} &= \frac{\text{Instruktionenanzahl}}{\text{Instruktionen pro Sekunde}} = \frac{100.000}{25,806 * 10^6} = 0,003875 \text{ Sekunden} \\ &= \frac{CPI * \text{Instruktionenanzahl}}{\text{Takte pro Sekunde}} = \frac{1,55 * 100.000}{40 * 10^6} = 0,003875 \text{ Sekunden} \end{aligned}$$

4.17)