Formale Grundlagen 1, WS 2001/02	**12. Februar 2002**
Familienname: .... Vorname:	
Matrikelnummer: .... Studienkennzahl:	

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, diese Klausur selbst und ohne unerlaubte Hilfsmittel geschrieben zu haben.

Unterschrift:..

Beispiel	1	2	3	4	5	6	$\sum$
erreichte Punkteanzahl							
erreichbare Punkteanzahl	4	4	6	2	2	7	25

1. In einem zweistöckigen Haus kann die Beleuchtung des Stiegenhauses in jedem Stockwerk (Erdgeschoß, 1. Stock, 2. Stock) ein- und ausgeschaltet werden (treffen Sie dabei folgende Annahme: falls alle 3 Schalter auf "aus" stehen, brennt die Beleuchtung nicht). Bestimmen Sie die disjunktive Normalform dieser Schaltung.

2. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

$\mathbb{Z} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch
$\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch
$\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch
$\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch
$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch
$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$	□ wahr	□ falsch

3. Auf der Menge $\mathbb{Z}$ ist die Relation R gegeben durch

$$xRy :\Leftrightarrow \quad 3 \text{ ist Teiler von } x + 2y$$

(a) Zeigen Sie, dass die Relation R reflexiv ist:

(b) Zeigen Sie, dass die Relation R nicht antisymmetrisch ist:

(c) Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation (Sie müssen die Transitivität und die Symmetrie von R nicht nachweisen!).
Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $\langle 2 \rangle_R$, $\langle 4 \rangle_R$ und $\langle 6 \rangle_R$.

$\langle 2 \rangle_R =$

$\langle 4 \rangle_R =$

$\langle 6 \rangle_R =$

(d) Geben Sie ein Repräsentantensystem von R an:

4. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

   (a) In einer geordneten Menge kann es zwei verschiedene kleinste Elemente geben.

   ☐ wahr ☐ falsch

   (b) Jede geordnete Menge besitzt ein Infimum.

   ☐ wahr ☐ falsch

   (c) Jedes beschränkte Intervall besitzt ein Supremum.

   ☐ wahr ☐ falsch

   (d) Jede nicht-leere endliche linear geordnete Menge besitzt ein kleinstes Element.

   ☐ wahr ☐ falsch

5. Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist zur Aussage

"Die Funktion f ist beschränkt"

äquivalent?

$\forall r \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq r$	□ wahr	□ falsch
$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq r$	□ wahr	□ falsch
$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \exists x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq r$	□ wahr	□ falsch
$\forall r \in \mathbb{R}^+ : \exists x \in \mathbb{R} : \quad |f(x)| \leq r$	□ wahr	□ falsch

6. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto kx+d$ eine affine Funktion (dabei seien k und d reelle Zahlen mit $k > 0$).

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f injektiv ist:

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f surjektiv ist:

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton wachsend ist:

(d) Bestimmen Sie die inverse Funktion von f: