Formale Grundlagen der Informatik 1
Klausur vom 20.3.2000
Gruppe A

Vorname, Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ________________

Studienkennzahl: ________________

Dieser Zettel ist als Deckblatt mit abzugeben!

1. (10 Punkte) Schreiben Sie folgende Aussage in der Standardform an (nur eine Variable bei jedem Quantor, Aufschreiben versteckter Junktoren) und analysieren sie diese Form syntaktisch (unter Angabe der jeweils freien Variablen):

$$\forall x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

   Drücken Sie diese Aussage in einem umgangssprachlichen Satz aus.

2. (15 Punkte) Gelten folgende Aussagen oder nicht (Begründung)?

   (a) $A \cup B \subseteq A \cap B$, für gewisse Mengen A und B.
   (b) $\{x, \{x\}\} = \{x\} \cup \{\{x\}\}$, für alle x.
   (c) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
   (d) $|A \cup B| = |A| + |B|$, für alle Mengen A und B.
   (e) Für jede bijektive Funktion $f : A \to B$ gilt, dass A und B die gleiche Größe haben.

3. (15 Punkte)

   Seien a und b zwei unendliche Folgen über einer Menge A. Die *Mischung* $M(a, b)$ von a und b ist die unendliche Folge über A, in der sich die Elemente von a mit den Elementen von b abwechseln, d.h.

$$M([e, f, g, \ldots], [u, v, w, \ldots]) = [e, u, f, v, g, w, \ldots]$$

   Definieren Sie formal die Funktion M, vergessen Sie dabei nicht die Angabe des Argumentbereichs und des Wertebereichs.

   Gilt für alle solche Folgen a, b, c, $M(a, M(b, c)) = M(M(a, b), c)$?

4. (15 Punkte)

   Gegeben sei die Menge der Buchstabenfolgen

   "space", "spaces", "ace", "spaceship", "aces", "races",

   mit der partiellen Ordnung "ist enthalten in" (d.h. "ace" ist enthalten in "spaces", aber "races" ist nicht enthalten in "spaceship").

   Zeichnen sie das Hassediagramm dieser Relation und geben sie das kleinste bzw. größte Element an (falls solche Elemente existieren).

5. (15 Punkte) Seien $a := [1, 2, 3, 0]$, $b := [2, 3, 0, 1]$. Berechnen Sie unter Angabe der wesentlichen Zwischenschritte

   (a) $\sum_{0 \leq i < j < 4} (a_i * b_j)$

   (b) $\max_i |a_i - b_i|$

   (c) $|\{i \in \mathbb{N}_4 : a_i > b_i\}|$

   (d) $\prod_{0 \leq i < 4} (a \circ b)_i$

   (e) $a^{-1} \circ b^{-1}$

6. (15 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Relation

$$R(f, g) :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \forall i \in \mathbb{N} : |f(i) - g(i)| \leq c$$

   Beweisen Sie ausführlich:

$$R \text{ ist transitiv auf } \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

7. (15 Punkte) Wir definieren

$$H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

   Zeigen Sie mittels Induktion ausführlich:

$$\forall n \in \mathbb{N} : H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

   Hinweis: es gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=a}^{b} \frac{1}{i} \geq (b - a + 1)\frac{1}{b}$.