

Mathematik 1 (Analysis)

Klausur 2, 30. September 2004

Musterlösungen

Aufgabe 1

1. Berechnen Sie die unendliche Summe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} \pm \dots$$

2. Berechnen Sie den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x + 4}{x^2 - 1}.$$

Lösung:

1. Ist geometrische Reihe. Daher

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$

2. Schreiben wir
- f
- für die rationale Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x + 4}{x^2 - 1}.$$

Wenn man in f für x den Wert 1 einsetzt ergibt sich $\frac{0}{0}$. Das Zählerpolynom wie auch das Nennerpolynom haben also 1 als Nullstelle, daher muß bei beiden der Linearfaktor $(x - 1)$ als Teiler auftreten, den man dann kürzen kann. Der Zähler faktorisiert zu

$$(x - 1)(x + 1)(x^3 - 2x^2 + x - 4), \text{ und der Nenner zu } (x - 1)(x + 1).$$

Das ganze gibt also

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^3 - 2x^2 + x - 4)}{(x - 1)(x + 1)} = x^3 - 2x^2 + x - 4.$$

Die auf ganz \mathbb{R} definierte Polynomfunktion $x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 4$ erweist sich somit als eine stetige Fortsetzung von f in die Stelle 1 (und auch in die Stelle -1 , aber das ist hier nicht wesentlich) und daher gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^3 - 2 * 1^2 + 1 - 4 = -4.$$

Gefunden wird die Faktorisierung durch Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom. Man kann natürlich auch L'Hospital verwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^3 - 4x - 1}{2x} = \frac{5 * 1^4 - 8 * 1^3 - 4 * 1 - 1}{2 * 1} = -4.$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\Phi: \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1), \quad x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

bijektiv ist mit inverser Funktion

$$\Phi^{-1}: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{y}{1 - |y|}.$$

Ist Φ im Punkt 0 differenzierbar?

Lösung:

Da man hier die inverse Funktion schon vor sich hat, geht es am schnellsten, direkt zu rechnen. Wir verwenden den Satz:

Satz 1 Sind $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow X$ dann gilt:

$$f \text{ bijektiv und } f^{-1} = g \iff g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y.$$

Also

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1} \circ \Phi)(x) &= \Phi^{-1} \left(\frac{x}{1 + |x|} \right) = \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{1 - \left| \frac{x}{1 + |x|} \right|} = \\ &= \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{1 - \frac{|x|}{1 + |x|}} = \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{\frac{1 + |x| - |x|}{1 + |x|}} = x = \text{id}(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Phi^{-1})(y) &= \Phi \left(\frac{y}{1 - |y|} \right) = \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{1 + \left| \frac{y}{1 - |y|} \right|} = \\ &= \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{1 + \frac{|y|}{1 - |y|}} = \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{\frac{1 - |y| + |y|}{1 - |y|}} = y = \text{id}(y) \end{aligned}$$

Zur Differenzierbarkeit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + |x|} = \frac{1}{1 + |0|} = 1$$

also ist Φ in 0 (und damit überall) differenzierbar; es gilt $\Phi'(0) = 1$.

Aufgabe 3 Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X_1 \longrightarrow X_2$ heißt **gleichmäßig stetig** wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 \quad (d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Zeigen Sie:

Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f stetig in jedem Punkt $x \in X$.

Lösung:

Es sei f glm. stetig und $x_1 \in X_1$ fest. Nehmen wir irgendein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu diesem ε (nach Voraussetzung der glm. Stetigkeit) ein $\delta > 0$ sodaß $\forall x, y \in X_1$ gilt:

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Insbesondere also:

$$\forall y \in X_1 (d_1(x_1, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_1), f(y)) < \varepsilon)$$

(wir haben einfach x zu x_1 spezialisiert). Das ist genau die Aussage: " f ist in x_1 stetig". Da x_1 beliebig in X_1 gewählt war, ist f global stetig.¹

Aufgabe 4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum. Für eine Menge $B \subseteq A$ bezeichne $\text{cl}_A(B)$ den Abschluß von B und $\text{int}_A(B)$ das Innere von B jeweils im Teilraum $(A, d|_{A \times A})$. Zeigen Sie:

$$\text{cl}_A(B) = \overline{B} \cap A.$$

Finden Sie eine analoge Formel für $\text{int}_A(B)$.

Lösung:

(\rightarrow): Sei $x \in \text{cl}_A(B)$. Dann ist x natürlich in A und jede Umgebung von x in A schneidet B . Betrachte irgendeine Umgebung U von x in X . Dann ist $U \cap A$ eine Umgebung von x im Raum A , daher also $U \cap A \cap B \neq \emptyset$. Wegen $B \subseteq A$ gilt $A \cap B = B$, und so $U \cap B \neq \emptyset$. Jede Umgebung U von x in X schneidet B , i.e., $x \in \overline{B}$. Insgesamt $x \in A \cap \overline{B}$.

(\leftarrow): $x \in \overline{B} \cap A$. Sei V Umgebung von x in A . Dann gibt es eine Umgebung U von x in X mit $U \cap A = V$. Wegen $x \in \overline{B}$ schneidet U die Menge B , also $U \cap B \neq \emptyset$. Es folgt

$$V \cap B = U \cap A \cap B = U \cap B \neq \emptyset.$$

¹Der Kern der Sache ist logischer Natur. Für jede beliebige Aussage \mathcal{P} ist der Satz

$$\exists a \forall b \mathcal{P} \rightarrow \forall b \exists a \mathcal{P} \tag{1}$$

wahr. Wenn es eine LVA gibt, die jeder Student haßt, dann hat doch jeder Student eine LVA, welche er haßt. Die Umkehrung gilt nicht allgemein (es könnte sein, daß nicht alle Studenten die gleiche Lehrveranstaltung hassen). Wenn man - um Aufgabe 3 zu lösen - für \mathcal{P} setzt

$$\mathcal{P} = \forall y (d_1(x, y) < \delta \rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

so schreibt sich 'f glm stetig' als ' $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \mathcal{P}$ ', während 'f global stetig' durch ' $\forall x \forall \varepsilon \exists \delta \mathcal{P}$ ' ausgedrückt wird. Nach (1) ist $\exists \delta \forall x \mathcal{P} \rightarrow \forall x \exists \delta \mathcal{P}$ wahr, indem man mit ε generalisiert, hat man

$$\forall \varepsilon (\exists \delta \forall x \mathcal{P} \rightarrow \forall x \exists \delta \mathcal{P})$$

und daraus folgt

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \mathcal{P} \rightarrow \forall \varepsilon \forall x \exists \delta \mathcal{P}.$$

Vertauscht man im Hinterglied noch die beiden Allquantoren (Quantoren gleichen Typs kann man immer vertauschen), so ergibt sich

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \mathcal{P} \rightarrow \forall x \forall \varepsilon \exists \delta \mathcal{P}.$$

Das ist die - somit als wahr erkannte Aussage

$$f \text{ glm stetig} \Rightarrow f \text{ global stetig.}$$

Ein Kollege hat das beim Kolloquium so gemacht.

Jede Umgebung von x in A schneidet B , daher gilt $x \in \text{cl}_A(B)$.

Um eine analoge Formel für $\text{int}_A(B)$ zu erhalten, verwendet man den eben abgeleiteten Sachverhalt und drückt B° durch Komplement und Abschluß aus [Lemma 3 nach Definition 38, $B^\circ = (\overline{B^c})^c$]:

$$\text{cl}_A(A \setminus B) = \overline{A \setminus B} \cap A, \text{ daher}$$

$$A \setminus \text{cl}_A(A \setminus B) = A \setminus (\overline{A \setminus B} \cap A) \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \text{int}_A(B) &= A \cap (\overline{A \setminus B} \cap A)^c = A \cap (\overline{A \setminus B}^c \cup A^c) = (A \cap \overline{A \setminus B}^c) \cup \emptyset = \\ &= A \cap \overline{(A \setminus B)^c} = A \cap (A^c \cup B)^\circ \end{aligned}$$