Mathematik 1 (Analysis)
Klausur 1, 9. Juli 2004

Musterlösungen

Aufgabe 1 *Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad (\text{jeweils } \forall x \in \mathbb{R}).$$

1. *Berechnen Sie* $\sinh'(x)$, $\cosh'(x)$ *und* $\tanh'(x)$.
2. *Zeigen Sie:*

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

3. *Zeigen Sie die Indentität*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \tag{1}$$

Lösung:

1.

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$
$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

2.

$$\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$
$$\frac{1}{4}(2e^x e^y - 2e^{-x}e^{-y}) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$
$$\frac{1}{4}(2e^x e^y + 2e^{-x}e^{-y}) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

3.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$$

Aufgabe 2 *Machen Sie sich die Aussage des folgenden Satzes klar:*

Satz 1 *Es sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall,* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung* $f'\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$*. Wenn für ein* $x_0 \in I$ *gilt, daß* $f'(x_0) \neq 0$*, dann existiert* f^{-1} *lokal auf einer Umgebung* V *von* $f(x_0)$ *als differenzierbare Funktion und es gilt*

$$\forall y \in V: \ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Verwenden Sie diesen Satz [und die Identität (1)], um die Ableitung der inversen Funktion von sinh *zu berechnen. [Zu berechnen ist also* $\left(\sinh^{-1}\right)'(y)$*.]*

<u>*Lösung:*</u> $\sinh(x) = y$ also $\sinh^{-1}(y) = x$.

$$\begin{aligned}\left(\sinh^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\sinh^{-1}(y))} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *Es sei* $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *die Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}.$$

1. *Zeigen Sie, daß der Banach'sche Fixpunktsatz zur numerischen Berechnung der Nullstelle von* f *in* $[0,1]$ *benutzt werden kann:*
   (a) *Zeigen Sie, daß das Image der Funktion* $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)+x$ *in* $[0,1]$ *enthalten ist.*
   (b) *Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine geeignete Lipschitz-Konstante für* g*.*
   (c) *Schließen Sie aus (a) und (b), daß* g *eine Kontraktion ist.*
2. *Führen Sie die numerische Berechnung der Nullstelle von* f *mit obigem Verfahren aus.*

<u>*Lösung:*</u>

1. $g(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$.
   (a) Für $0 \leq x \leq 1$ folgt

$$0 \leq \frac{1}{16}x^4 \leq \frac{1}{16} \text{ und } 0 \leq \frac{1}{5}x \leq \frac{1}{5}.$$

Addieren der beiden Ungleichngen:

$$\begin{aligned}&0 \leq \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{5}x \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{5} = \frac{21}{80}\\ &\frac{1}{2} \leq \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} \leq \frac{21}{80} + \frac{1}{2} = \frac{61}{80}\\ &0 \leq \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{61}{80} \leq 1\end{aligned}$$

das bedeutet, $g(x) \in [0,1]$.

(b) $g'(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}$. Für $0 \le x \le 1$ gilt

$$0 \le \frac{1}{4}x^3 \le \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5} \le \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \le \frac{1}{2}$$

also $0 \le g'(x) \le \frac{1}{2}$ und daher $|g'(x)| \le \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0,1]$. Falls nun x, y zwei verschiedene Elemente von $[0,1]$ sind, $x < y$, dann sagt der Mittelwertsatz, daß es ein Θ mit $x < \Theta < y$ gibt, sodaß

$$g(y) - g(x) = g'(\Theta)(y - x) \quad \text{und daher} \quad |g(y) - g(x)| = |g'(\Theta)||y - x|.$$

Da g' auf $[0,1]$ durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist, folgt

$$|g(y) - g(x)| \le \frac{1}{2}|y - x|.$$

(c) Wegen (a) kann g als Funktion $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ betrachtet werden, sie ist dort Lipschitz mit Konstante < 1, also eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $[0,1]$.

2. $f(x) = 0$ genau dann, wenn $g(x) = x$. Um die Nullstelle von f in $[0,1]$ zu berechnen, bestimmt man den Fixpunkt von g.

   Sei $x_0 \in [0,1]$ beliebig, z.B. $x_0 = 0$. Dann ist $x_1 = g(x_0) = 0.5$, $x_2 = g(0.5) = 0.60390625$ und so weiter.

   Nullstelle(f)=Fixpunkt(g) auf $[0,1]$ bei

$$0.63793919229396303234\ldots$$