| Matrikel | | | | | | | | SKZ | | | | Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Klausur 3

# Formale Grundlagen 2

14. Januar 2005

**Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.**

**Aufgabe 1** *Betrachten Sie die folgenden Probleme.*
**Problem** $P_1$**:** *Ist die Sprache $L(M)$ einer Turingmaschine $M$ rekursiv aufzählbar?*
**Problem** $P_2$**:** *Ist die Sprache $L(M)$ einer Turingmaschine $M$ rekursiv?*
**Problem** $P_3$**:** *Ist die Sprache $L(M)$ einer Turingmaschine $M$ unendlich?*
**Problem** $P_4$**:** *Gilt $L(M) = \emptyset$ für eine Turingmaschine $M$?*
**Problem** $P_5$**:** *Schreibt eine Turingmaschine $M$ bei jeder möglichen Eingabe innerhalb der ersten 1000 Schritte eine 0 auf das Band?*
**Problem** $P_6$**:** *Besitzt das homogene Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

*für die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mehr als eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ ?*
***Fragen:***

| **A** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $P_1$ entscheidbar?*
*Für eine Turingmachine $M$ ist $L(M)$ nach Definition rekursiv aufzählbar. Die zugehörige Instanzenmenge ist $L_{P_1} = \{ M \mid M \text{ ist TM} \}$. Bis auf Umordnung der Codes gehört zu jeder Turingmachine $M$ eine Codierung $\langle M \rangle$. Wir können also sagen obige Menge ist in Bijektion mit $L_S = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ ist TM} \} = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in S \}$ wobei $S$ die* triviale *Menge aller r.a. Sprachen ist. Offensichtlich ist $L_S$ rekursiv, da man von einem Wort lediglich entscheiden muss, ob es der Code einer Turingmachine ist oder nicht.*

| **B** | | nein |
|---|---|---|

*Ist $P_2$ entscheidbar?*
*Satz von Rice (S. 67, Satz 4.2.1)*

| **C** | | nein |
|---|---|---|

*Ist $P_3$ entscheidbar?*
*$\left\{ L \subseteq \{0,1\}^* \,\middle|\, L \text{ r.a.} \wedge L \text{ unendlich} \right\}$ ist nichttriviale Eigenschaft von r.a. Sprachen, somit unentscheidbar. Das bedeutet, $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ unendlich} \}$ ist nicht rekursiv. Das korrespondiert aber eineindeutig mit der Instanzenmenge von Problem $P_3$.*

| **D** | | nein |
|---|---|---|

*Ist $P_4$ entscheidbar?*

| **E** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $P_5$ entscheidbar?*
*Eine TM kann in 1000 Schritten höchstens 1000 Zellen des Eingabebandes lesen. Für jede Belegung des Eingabebandes mit Zeichen des Bandalphabetes müssen wir 1000 Schritte ausführen und nachschauen, ob eine 0 geschrieben wurde. Dies kann aber leicht von einer TM simuliert werden. Es muß nur eine endliche Anzahl getestet werden. Also ist die Instanzenmenge rekursiv.*

| **F** | ja | |
|---|---|---|

*Ist $P_6$ entscheidbar?*
*Die Instanzenmenge $\left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 \,\middle|\, ad - bc = 0 \right\}$ ist rekursiv.*

**Aufgabe 2** *In der Vorlesung wurde die folgende standardisierte Kodierung von Turingmaschinen besprochen:*
*Gegeben Turingmaschine $M$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Anfangszustand $q_1$, Endzustandsmenge $F = \{q_2\}$, Überführungsfunktion $\delta$. Wir bezeichnen die Symbole $0, 1, \sqcup$ in dieser Reihenfolge mit $X_1, X_2, X_3$, die Bewegungsrichtungen $L, R$ mit $D_1, D_2$ (die stationäre Option 'S' kommt nicht vor).*

*Eine Operation $\delta(q_i, A_j) = (q_k, A_l, D_m)$ wird kodiert als $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. Die Turingmaschine $M$ selbst wird kodiert als*

$$111code_1 11code_2 \dots 11code_r 111$$

*wobei jedes $code_n$ die obige Form hat.*
*Gegeben sei der folgende Code einer Turingmaschine $M$*

11101001001001001101000100010010011001000100101001100010001010100111

*Lösung: Offenbar ist die Überführungsfunkion gegeben durch folgende Tabelle.*

| $\delta$ | 0 | 1 | $\sqcup$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | $-$ | $q_2 1 R$ | $q_3 1 R$ |
| $q_2$ | $-$ | $-$ | $q_2 0 R$ |
| $q_3$ | $-$ | $-$ | $q_1 0 R$ |

*Es gilt $L(M) = \{1\} \circ \Sigma^*$. $G(M) = \{0\}$.*

***Fragen:***

**A** | | nein — *Ist $L(M) \subseteq \{1\}^+$?*

**B** | ja | — *Akzeptiert $M$ das Wort 11111?*

**C** | | nein — *Akzeptiert $M$ das leere Wort?*

**D** | ja | — *Ist $L(M)$ regulär?*

**E** | | nein — *Sind $L(M)$ und $\{1\}^*$ identisch?*

**F** | ja | — *Betrachten Sie $M$ als generierende Turingmaschine mit 1 als ausgezeichnetem Trennsymbol. Ist $G(M)$ endlich?*

**Aufgabe 3** *Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_1, L_2 \in \Sigma^*$. Für $i = 1, 2$ bezeichnen wir mit $\overline{L_i} := \Sigma^* \setminus L_i$ das Komplement von $L_i$.*

***Fragen:***

**A** | | nein — *Wenn $L_1$ und $L_2$ rekursiv sind, ist dann $L_1 \cap L_2$ regulär?*

*Wähle eine nicht-reguläre Sprache $L_1$ und $L_2 = L_1$.*

**B** | | nein — *Wenn $L_1$ endlich ist, ist dann $\overline{L_1} \cap L_2$ regulär?*

*Wähle $L_1 = \emptyset$ und $L_2$ irgendeine nicht-reguläre Sprache.*

**C** | | nein — *Wenn $L_1$ rekursiv aufzählbar ist, ist dann $\overline{L_1}$ rekursiv?*

*Wäre $\overline{L_1}$ rekursiv, dann müsste auch $L_1$ rekursiv sein. Wähle etwa $L_1 = L_u$ (universelle Sprache).*

**D** | ja | — *Wenn $\overline{L_1}$ rekursiv ist und $L_2$ die Menge aller Wörter ist, die auf eine 1 enden, ist dann $L_D := L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar?*

**E** | ja | — *Ist $L_D$ aus Frage D rekursiv?*

*$L_1$ ist rekursiv und damit auch rekursiv aufzählbar. $L_2$ ist sogar regulär und damit auch rekursiv und rekursiv aufzählbar. Der Durchschnitt zweier rekursiver Sprachen ist wieder rekursiv und damit auch rekursiv aufzählbar.*

**F** | | nein — *Ist $L_D$ aus Frage D regulär?*

*Sei $L_1$ eine rekursive aber nicht reguläre Sprache. Dann ist auch $L_1' := L_1 \circ \{1\}$ rekursiv aber nicht regulär. Offenbar ist aber $L_1' = L_1' \cap L_2$.*

**G** | ja | — *Sei $L_1$ endlich und $L_2$ rekursiv aufzählbar. Ist $L_1 \cap \overline{L_2}$ rekursiv?*

*Jede endliche Sprache ist regulär und damit auch rekursiv. $L_1 \cap \overline{L_2}$ ist endlich.*

**H** | | nein — *Sei $L_1 \neq \Sigma^*$ regulär und $L_2$ rekursiv aufzählbar. Ist die Sprache $L_1^* \cap \overline{L_2}$ rekursiv aufzählbar?*

*Wähle $L_1 = \Sigma$ und $L_2 = L_u$.*