Matrikel								SKZ				Name	

Klausur 2

Formale Grundlagen 2

5. Dezember 2003

Zu jedem Buchstaben muß entweder ja oder nein angekreuzt werden.

Aufgabe 1 *Gegeben seien zwei Turingmaschinen* $M_i = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \{q_2\}, \delta_i)$, $i = 1, 2$ *mit* $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$ *und* $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$. *Die folgenden Tabellen beschreiben die Überführungsfunktionen:*

δ_1	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_2, 1, R)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 0, R)$
q_1	$-$	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 1, R)$
q_2	$-$	$-$	$(q_2, 0, R)$

δ_2	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_1, 1, R)$	$(q_0, 1, R)$	$-$
q_1	$-$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \sqcup, L)$
q_2	$-$	$-$	$-$

Fragen:

A	ja	

Enthält $L(M_1)$ *das leere Wort?*

Das erste Zeichen, was gelesen wird, ist $\sqcup$ *und wir kommen in den Zustand* q_1. *Nachdem wir ein weiteres* $\sqcup$ *lesen, sind wir im akzeptierenden Zustand* q_2.

B	ja	

Gilt $1 \in L(M_1) \cup L(M_2)$?

Die Machine M_1 *liest die* 1 *und ein nachfolgendes* $\sqcup$ *und befindet sich dann im akzeptierenden Zustand* q_2. *Wir brauchen den Lauf von* M_2 *nicht mehr testen, da klar ist, daß* $1 \in L(M_1) \cup L(M_2)$.

C	ja	

Ist $L(M_2)$ *eine rekursiv aufzählbare Sprache?*

Natürlich, nämlich laut Definition.

D	ja	

Ist $L(M_1) \cap L(M_2)$ *eine reguläre Sprache?*

Man sieht leicht, daß
$L(M_1) = \{\varepsilon, 1\} \cup \{ 0a \mid a \in \Sigma^* \} \cup \{ 11a \mid a \in \Sigma^* \}$ *und*
$L(M_2) = \{ 1^m 01^n \mid m, n \in \mathbb{N} \}$. *Damit gilt*
$L(M_1) \cap L(M_2) = \{ 1^m 01^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \neq 1 \}$. *Diese Sprache ist offenbar regulär.*

E		nein

Gilt $1^n \in L(M_2)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > 0$.

Ein Wort von $L(M_2)$ *enthält wenigstens eine 0, da die Maschine sonst nicht in den Zustand* q_2 *gelangen kann.*

Aufgabe 2 *Beantworten Sie folgende Fragen.*

A	ja	

Gibt es zu jeder deterministischen Turingmaschine M eine nicht-deterministische Turingmaschine N mit $L(M) = L(N)$?

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$, dann wähle $N = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta')$ wobei $\delta' : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{R, L, S\})$ definiert ist durch $\delta'(q, \gamma) = \{\delta(q, \gamma)\}$.

B	ja	

Gibt es zu jeder nicht-deterministischen Turingmaschine N eine deterministische Turingmaschine M mit $L(M) = L(N)$?

Siehe Vorlesungsskriptum Satz 1.4.2.

C	ja	

Gibt es für jede endliche Sprache L eine Turingmaschine, die genau die Wörter von L generiert (und keine anderen)?

Jede endliche Sprache ist regulär und damit auch rekursiv aufzählbar, also gibt es nach Satz 1.4.3 aus dem Skriptum so eine Turingmaschine.

D	ja	

Betrachten Sie die Maschine M_1 aus Aufgabe 1 als generierende Turingmaschine. Als ausgezeichnetes Trennsymbol werde 0 verwendet. Ist dann $1 \in G(M_1)$?

$G(M_1) = \{\varepsilon, 1\}$

E	ja	

Die Maschine M_2 aus Aufgabe 1 berechnet eine Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Dabei werden die Eingabezahlen als eine Folge von 1en auf dem Band dargestellt, die durch eine 0 getrennt sind. Eine Folge von n 1en ($n \in \mathbb{N}$) ist als die Zahl n zu interpretieren. Gilt $f(x, y) = x + y + 1$?

Die Turingmaschine überschreibt die 0 der Eingabetrennung mit einer 1. Also ist $f(x, y) = x + y + 1$.

Aufgabe 3 *Es seien*
$L_1 = \left\{ 1^m01^n01^k \,\middle|\, m,n,k \in \mathbb{N},\ n = m + k \right\}$,
$L_2 = \{ 1^m01^n1^m \mid m,n \in \mathbb{N},\ m < 2004 \}$,
$L_3 = \{ 1^m01^n \mid m,n \in \mathbb{N},\ m > n \}$,
$L_4 = \{ 1^m0^n \mid m,n \in \mathbb{N} \}$.
Fragen:

A	ja	

Ist $L_1 \setminus L_2$ rekursiv?
L_1 und L_2 sind rekursiv. Eine Mengendifferenz führt nicht aus der Klasse rekursiver Mengen heraus.

B	ja	

Ist $L_2 \cap L_3$ rekursiv aufzählbar?
Der Durchschnitt zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist immer rekursiv aufzählbar.

C	ja	

Ist $L_3 \circ L_4$ regulär?
$L_3 \circ L_4 = \left\{ 1^m01^n0^k \,\middle|\, m,n,k \in \mathbb{N} \right\}$, was klarerweise regulär ist. Die Zusammensetzung einer nicht-regulären Sprache L_3 und einer regulären Sprache L_4 kann also wieder regulär sein.

D		nein

Ist $L_4 \circ L_3$ regulär?
$L_4 \circ L_3 = \left\{ 1^m0^n1^k01^l \,\middle|\, m,n,k,l \in \mathbb{N},\ k > l \right\}$. Diese Sprache ist genausowenig regulär wie L_3. Ein DEA müßte sich das k „merken“ können, was mit endlich vielen Zuständen nicht möglich ist.

E		nein

Sei $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ so gewählt, daß $L_1 = \left\{ 1^m01^n01^{g(m,n)} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{N} \right\}$. Ist die Funktion g total?
Es gibt kein k, so daß $1001^k \in L_1$. Also ist $g(1,0)$ undefiniert und g somit nicht total.

Aufgabe 4 *Sei $P(t,x,y,z) \equiv x{+}y < z{+}t \wedge t|x$ und $f(x,y,z) = \min_t P(t,x,y,z)$.*
Fragen:

A		nein

Ist $f(3,4,6) = 1$?
$f(3,4,6) = 3$

B	ja	

Ist $f(3,4,7) = 1$?

C		nein

Ist $f(4,3,4) = 1$?
$f(4,3,4) = 4$

D	ja	

Ist $f(4,3,1)$ undefiniert?

E		nein

Ist $f(x,x,2x)$ undefiniert für alle $x \in \mathbb{N}$?
Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $f(x,x,2x) = 1$.