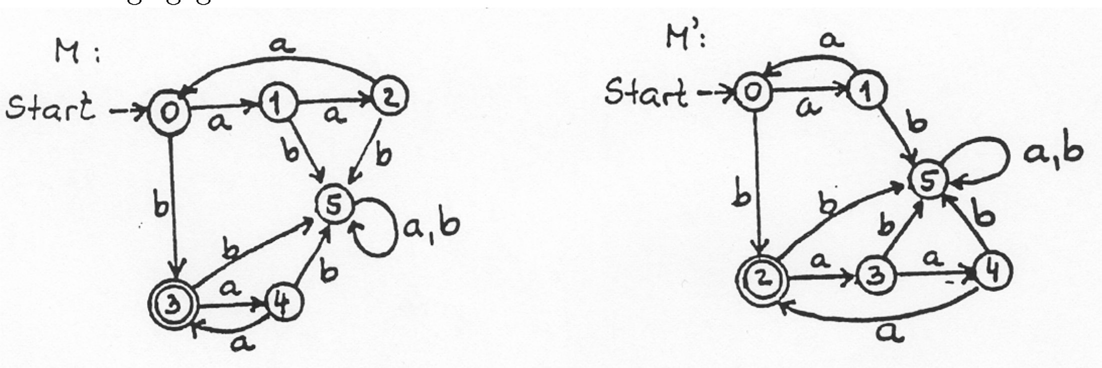
Klausur "Formale Grundlagen 2" (326.933)
10.5.2003

Bitte Folgendes beachten:

- *Es dürfen keine Unterlagen zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit Aufgabe 1 und endend mit Aufgabe 5.*

---

(1) Betrachten Sie die endlichen Automaten $M = (\{0,1,2,3,4,5\},\{a,b\},0,\{3\},\delta)$ und $M' = (\{0,1,2,3,4,5\},\{a,b\},0,\{2\},\delta')$, wobei die Überführungsfunktionen δ und δ' wie folgt gegeben sind.



Ist $L(M) \cap L(M')$ endlich? Begründen Sie die Antwort.

Lösung:

$$L(M) = \{a^{3m}ba^{2n} \mid m,n \in \mathbb{N}\},$$
$$L(M') = \{a^{2m}ba^{3n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}.$$

Also,

$$L(M) \cap L(M') = \{a^{6m}ba^{6n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}.$$

Das ist eine unendliche Menge.

(2) Zeigen Sie: *Sind L, L' reguläre Sprachen, dann sind auch $L \cap L', L \cup L', \overline{L}$ (Durchschnitt, Vereinigung, Komplementärmenge) regulär.*

Lösung: Seien M, M' endliche Automaten, welche L, L' akzeptieren. Man erhält einen Automaten für $\overline{L}$, indem man die Antworten von M umkehrt, also $Q \setminus F$ als die akzeptierenden Zustände nimmt. Für $L \cap L'$ sind die beiden Automaten parallel zu schalten (vgl. Übungen) und die Antworten mit "und" zu verbinden, für $L \cup L'$ sind die beiden Automaten parallel zu schalten und die Antworten mit "oder" zu verbinden.

(3) Bezeichne p_i die i-te Primzahl; also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ usw. Die Unärdarstellung einer natürlichen Zahl n ist eine Folge von n 1-en, also etwa "11" ist die Unärdarstellung von 2. Für $i \in \mathbb{N}$ sei L_i die Menge aller Unärdarstellungen natürlicher Zahlen, welche durch p_i teilbar sind. Also etwa $L_2 = \{111, 111111, \ldots\}$. Wir betrachten nun die Sprache $L \subseteq \{1\}^*$, wobei

$$L = \Big(\bigcap_{i=1}^{5} L_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i=6}^{9} \overline{L_i}\Big).$$

Zeigen Sie: *L ist regulär.*

<u>Lösung:</u> Für jedes i ist L_i regulär. Dazu nehme man einen endlichen Automaten mit i Zuständen; der Anfangszustand ist auch Endzustand, und nach Lesen von i 1-en wird jeweils zum Anfangszustand zurückgekehrt.
Wegen Aufgabe (2) können also die Sprachen L_i mittels Komplement, Durchschnitt und Vereinigung kombiniert werden, und das Ergebnis ist wieder regulär.

(4) Zeigen Sie: *Wenn eine Sprache L r.a. ist, so gibt es eine Turing–Maschine M, welche L aufzählt ohne dabei jemals ein Wort der Sprache zu wiederholen.*

<u>Lösung:</u> Laut Def. gibt es eine TM $\tilde{M}$, welche L generiert; eventuell mit Wiederholung von Wörtern. Wir erhalten M durch folgende Modifizierung von $\tilde{M}$: M schreibt zunächst ein generiertes Wort w auf ein Hilfsband (dort stehen auch alle bisher generierten Wörter $w_1, \ldots, w_n$). Danach vergleicht M das Wort w mit allen Wörtern w_i auf dem Hilfsband. Wird w auf dem Hilfsband nicht gefunden, dann wird es auf das Ausgabeband geschrieben.

(5) Sind die folgenden Sprachen r.a.? Begründen Sie die Antwort.
(a) $L_a = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| \geq 1\}$, also L_a besteht aus all denjenigen Kodes von Turing–Maschinen, welche mindestens ein Wort akzeptieren;
(b) $L_b = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = 0\}$, also L_b besteht aus all denjenigen Kodes von Turing–Maschinen, welche kein Wort akzeptieren.

<u>Lösung:</u> (a) "ja": systematisch Tupel (i,j) erzeugen, M auf Wort w_i j Schritte laufen lassen. Akzeptiert M das Wort w_i in j Schritten, so ist $\langle M\rangle$ in L_a.
(b) "nein": das Komplement von L_a ist L_b vereinigt mit der rekursiven Menge aller Wörter, welche keine Kodes von Turingmaschinen sind. Wäre also L_b r.a., dann wäre auch $\overline{L_a}$ r.a., und zusammen mit (a) wäre also L_a rekursiv. Das ist aber nach dem Satz von Rice nicht möglich.